11 класс, Экспресс-подготовка к ЕГЭ по физике

Теоретический обзор к занятию 8.

Темы: гармонические колебания.

Термином «колебания» обозначают очень широкий класс процессов (не только механических), в которых какая-либо характеристика многократно меняет направление своего изменения. В зависимости от характера процессов выделяют **незатухающие** и **затухающие** колебания, **периодические**, и **апериодические** колебания.

В материалах ЕГЭ-2022 по физике рассматриваются механические колебания (включая волновые процессы) и электромагнитные колебания (задания по электромагнитным колебаниям включены в раздел «оптика»). Механическим колебаниям могут быть посвящены задания с №№ 5-8 (базового уровня сложности), № 25 и № 30. Как обычно, на № 30 нужно обратить особое внимание, так как в этом задании (самом «дорогом» в экзамене по количеству баллов) необходимо в развернутом решении приводить его обоснование со ссылками на физические законы. Поэтому оно требует, помимо знания методики решения, и хорошее знание теории. Знание теории и методики решения задач по электромагнитным колебаниям может понадобится в заданиях №№ 15-19, № 24, № 26 и № 29 (все они относятся к среднему или повышенному уровню сложности, но в этом случае у составителей есть довольно большой выбор – в этих заданиях могут быть представлены и другие темы из разделов «электричество и магнетизм» и «оптика»). Все равно ясно, что тема «колебания» очень важная и два-три задания по этой теме встретятся в материалах экзамена.

Также важно понимать, что в ЕГЭ изучаются в основном *гармонические колебания* (см. ниже), многие свойства которых являются общими для механических и электромагнитных процессов. Поэтому их изучение объединено в этом занятии курсов.

Итак, самый важный в нашем курсе тип колебаний – это **гармонические колебания**, то есть незатухающие периодические колебания, происходящие по гармоническому закону (зависимость характеристики процесса от времени выражается через гармонические функции – косинус или синус). Например, в механике при гармонических колебаниях материальной точки вдоль одной координатной оси (x) закон движения записывается в виде:

$$x(t) = x_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Здесь величина x_m называется **амплитудой** колебаний, $\omega \equiv \dfrac{2\pi}{T}$ – это **циклическая частота**, связанная с **периодом колебаний** T, а величину, находящуюся в аргументе гармонической функции, называют **фазой** колебаний (ее значение при $t = 0$ φ_0 – «начальная» фаза). При решении задач о гармонических колебаниях важно уметь использовать:

1) кинематические соотношения:

При заданной выше зависимости координаты от времени закон изменения скорости и ускорения имеет вид:

$$v_x(t) = -\omega x_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = v_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}) \quad (v_m = \omega x_m)$$

$$a_x(t) = -\omega^2 x_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = a_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi) \quad (a_m = \omega^2 x_m)$$

Как видно, амплитуда скорости $v_m = \omega x_m$, и колебания скорости опережают по фазе колебания координаты на $\dfrac{\pi}{2}$; амплитуда ускорения $a_m = \omega v_m = \omega^2 x_m$, и колебания ускорения происходят в противофазе с колебаниями координаты.

2) уравнение движения:

Гармонические колебания возникают в системах, в которых уравнения движения тел, следующие из второго закона Ньютона, приводятся к виду **уравнения гармонических колебаний**

$$x_t'' + \omega_0^2 x = 0$$

Замечательное свойство этого уравнения состоит в том, что его решение <u>**всегда**</u> можно записать в виде

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t), \quad или \quad x(t) = x_m \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Более того – вид решения не зависит от того, какова физическая природа величины x (это может быть декартова координата, угол поворота, заряд конденсатора и вообще что угодно). Постоянные величины A и B в этом решении, так же как связанные с ними значения амплитуды x_m и начальной фазы φ_0 обычно определяют из «начальных условий», то есть из значений величины x и ее производной («скорости изменения» x) в начальный момент времени, например, при $t = 0$

$$\left\{\begin{matrix} x(0) = x_0 \\ x_t'(0) = v_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} A = x_0 \\ B = v_0 / \omega_0 \end{matrix}\right.,$$

$$x_m = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega_0^2}, \; \varphi_0 = -\arcsin\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + \omega_0^2 x_0^2}}\right).$$

Этот способ построения решения корректен даже в том случае, когда движение изучаемой системы вообще <u>не является колебанием</u>! **Всякий раз**, когда уравнение, задающее изменение любой физической величины со временем, принимает вид **уравнения гармонических колебаний**, можно сделать вывод о том, что в течение некоторого интервала времени эта величина изменяется по гармоническому закону – по закону **синуса** или **косинуса**.

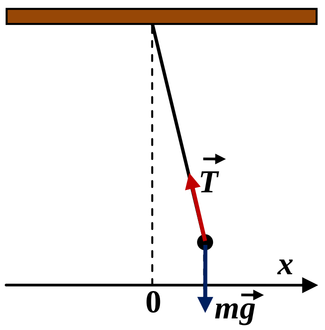
3) превращения энергии:

Свободные гармонические колебания могут возникать только в системах, в которых отсутствуют диссипативные силы, так как в противном случае колебания будут затухающими. Поэтому в процессе гармонических колебаний полная механическая энергия сохраняется, но происходит постоянный переход ее из одной формы в другую. Например, для ***пружинного маятника*** (груза массы m на пружине жесткостью k) кинетическая энергия достигает максимума при прохождении положения равновесия, где потенциальная энергия деформированной пружины обращается в ноль, а в точке максимального отклонения они меняются местами:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = const = \frac{mv_m^2}{2} = \frac{kx_m^2}{2}$$

Таким образом, с энергетической точки зрения гармонические колебания в механике – процесс превращения энергии из потенциальной в кинетическую и обратно, причем максимальное значение кинетической энергии равно максимальному значению потенциальной.

Важный пример системы, совершающей гармонические колебания – ***математический маятник***. Так называют маленький массивный груз, подвешенный на легкой нерастяжимой нити длиной l в однородном поле тяжести g. Ясно, что положение равновесия такого груза соответствует вертикальному положению нити. Если следить за изменением положения

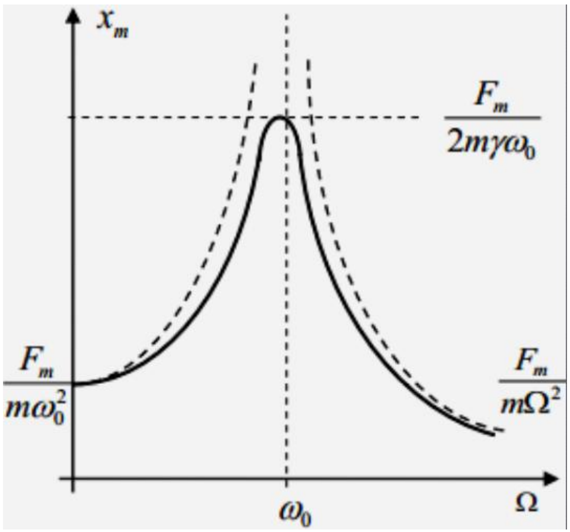


груза в проекции на горизонтальную ось (см. рисунок), то уравнение движения записывается в виде $ma_x = T_x = -T\sin(\varphi)$, где φ – угол отклонения нити от вертикали. Ясно, что $\sin(\varphi) = \frac{x}{l}$ и что $T = mg\cos(\varphi) + m\frac{v^2}{l}$ (сила натяжения нити уравновешивает компоненту силы тяжести, направленную вдоль нити, и создает центростремительное ускорение груза). Поэтому уравнение движения здесь гораздо более сложное:

$a_x = -g\frac{x}{l}\left[\frac{\sqrt{l^2-x^2}}{l}+\frac{v^2}{gl}\right]$. Однако при ***малых углах отклонения*** от положения равновесия $x << l$, и $v^2 << gl$, и поэтому $a_x \approx -g\frac{x}{l}$. Можно это уравнение переписать в виде $x_t'' + \frac{g}{l}x \approx 0$. Значит, колебания математического маятника при малых углах отклонения с высокой точностью являются гармоническими колебаниями с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

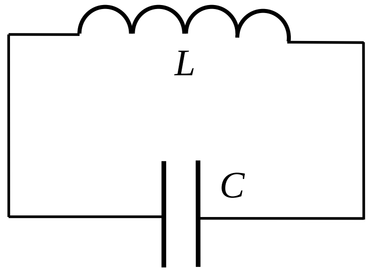
Если в системе, совершающей колебания, присутствуют диссипативные силы (например, сила трения), то вследствие потерь механической энергии амплитуда колебаний будет убывать, то есть колебания будут **затухающими**. Убыль энергии механических колебаний, естественно, будет определяться работой диссипативных сил.

Помимо свободных, тела могут совершать **вынужденные** колебания, которые происходят под действием периодической «вынуждающей» силы. Вынужденные колебания даже при наличии трения поддерживаются незатухающими за счет работы вынуждающей силы. Если свободные колебания происходят с **собственной частотой** (которая определяется параметрами системы – например, для груза на пружине $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$), то вынужденные колебания – с частотой вынуждающей силы. Рассмотрим груз на пружине, колеблющийся под действием силы $F_x(t) = F_0 \cdot \cos(\omega t)$. Тогда, исходя из уравнения движения $m a_x = -k x + F_0 \cos(\omega t) \Rightarrow \; x'' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$) и считая колебания происходящими «в такт» с вынуждающей силой, получим $x(t) = A \cdot \cos(\omega t) \Rightarrow \; A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$. Таким образом амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты вынуждающей силы, и при $\omega = \omega_0$ резко возрастает (В отсутствие трения – до бесконечности! Реально степень возрастания ограничивается именно диссипативными силами). Это явление называют **резонансом** в вынужденных колебаниях. На графике представлена ***резонансная кривая*** – зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы (при фиксированной амплитуде силы). Пунктиром показана зависимость в отсутствие трения, сплошная кривая – при наличии трения, зависящего от скорости ($\vec{F}_{тр} = -m\gamma \cdot \vec{v}$).



При изучении механических волновых процессов тоже в первую очередь рассматривают гармонические волны. Например, в гармонической звуковой волне, распространяющейся вдоль оси *x*, колебания звукового давления (отклонения давления от атмосферного) происходят по закону $\delta p(x,t) = \delta p_m \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$. Для ЕГЭ главное – знать соотношения между циклической (ω) и обычной (ν) частотой звука: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$, между *волновым числом* (k) и *длиной волны* (λ): $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ и связь этих величин со скоростью распространения волны $V_{зв} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu$.

Полностью аналогично механическим рассматриваются **электромагнитные колебания** в **идеальном колебательном контуре** – цепи, составленной из катушки индуктивности и конденсатора. Именно задания, посвященные электромагнитным колебаниям, наиболее распространены среди заданий по теме «колебания» в открытом сегменте ЕГЭ.



Идеальность контура означает отсутствие сопротивления. В этом случае в нем возникают незатухающие свободные колебания. В самом деле, уравнение, определяющее закон изменения заряда конденсатора

$$U_C + U_L = 0 \Rightarrow \frac{q_C}{C} + L\frac{dI_L}{dt} = 0$$

$$I_L = \frac{dq_C}{dt} \Rightarrow \frac{d^2 q_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} q_C = 0$$

имеет вид **уравнения гармонических колебаний**. Соответственно законы изменения заряда и тока

$$q(t) = q_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$I(t) = -\omega q_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = I_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}) \quad (I_m = \omega q_m).$$

Частота свободных колебаний (ее называют также «**собственной частотой**» колебательного контура) $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, а период свободных колебаний $T = 2\pi\sqrt{LC}$ (последнее соотношение называют *формулой Томсона*).

Отметим аналогию с **кинематикой** механических колебаний: заряд конденсатора и ток в катушке связаны между собой точно так же, как координата и скорость груза на пружине! Это не удивительно, так как ток есть не что иное, как «скорость изменения» заряда. Итак: амплитуда тока и амплитуда заряда связаны соотношением $I_m = \omega q_m$, (отметим, что заряд, в свою очередь, связан с напряжением на конденсаторе $q = CU$, так что $I_m = \omega C U_m = \sqrt{\frac{C}{L}} U_m$). Колебания тока опережают по фазе колебания заряда на $\frac{\pi}{2}$. Эти соображения позволяют по таблице или графику колебаний заряда (напряжения на конденсаторе) устанавливать значения тока в разные моменты времени. К примеру: пусть значения напряжения на конденсаторе емкостью $C = 165$мкФ в разные моменты времени имеют значения, приведенные в таблице (с точностью ± 0,1 В):

t, мкс	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U, мВ	4,0	3,5	2,0	0	- 2,0	- 3,5	- 4,0	- 3,5	-2,0	0	2,0

В этом случае мы можем узнать величину силы тока в контуре в любой момент времени. Как видно из таблицы, интервал между двумя обращениями напряжения в ноль равен 6 мкс. Ясно, что гармоническая функция обращается в ноль через половину периода колебаний, то есть период $T = 2\pi\sqrt{LC} = 12$ мкс. Кроме того, точно между моментами обращения напряжения в ноль его модуль достигает значения 4 мВ. Значит, это и есть амплитуда колебаний напряжения, а амплитуда колебаний заряда $q_m = CU_m = 0{,}66$мкКл, а амплитуда колебаний тока $I_m = \omega q_m = \frac{2\pi}{T} q_m \approx 0{,}35$А. Из таблицы видно, что при напряжение проходит амплитудное значение, поэтому записанные выражения соответствуют закону колебаний $U(t) = U_m \cos(\omega t)$. Значит, ток зарядки конденсатора (то есть положительным мы считаем ток, увеличивающий заряд конденсатора при полярности напряжения, заданной в таблице) $I(t) = -I_m \sin(\omega t)$. Используя заданные величины, этот закон следует записать в виде $I(t) = -\frac{2\pi}{T} C U_m \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$, где T и U_m определены выше из таблицы.

Развивая аналогию между разными типами колебаний, установить следующее соответствие величин, характеризующих механические (груз на пружине) и электромагнитные (LC-контур) колебания:

заряд конденсатора q – аналог **координаты** груза x;

сила тока в контуре $I = \frac{dq}{dt}$ – аналог **скорости** груза v_x;

скорость изменения тока $\frac{dI}{dt}$ – аналог **ускорения** груза a_x;

индуктивность катушки L – аналог **массы** груза m;

обратная емкость конденсатора $\frac{1}{C}$ – аналог **коэффициента упругости** пружины k;

энергия магнитного поля в катушке $\frac{LI^2}{2}$ – аналог **кинетической энергии** груза $\frac{mv^2}{2}$;

энергия электрического поля конденсатора $\frac{q^2}{2C}$ – аналог **потенциальной энергии** пружины $\frac{kx^2}{2}$.

Так же, как и при описании механических колебаний, для идеального контура важно понимать **энергетику** колебаний. В процессе незатухающих колебаний энергия магнитного поля в катушке переходит в энергию электрического поля в конденсаторе и обратно. Полная энергия колебательного контура остается постоянной:

$$\frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = const = \frac{LI_m^2}{2} = \frac{q_m^2}{2C} = \frac{CU_m^2}{2}.$$

Последние равенства обращают наше внимание на то обстоятельство, что заряд на конденсаторе (и вместе с ним энергия электрического поля) достигает максимальной величины в тот момент, когда ток (и вместе с ним энергия магнитного поля) равен нулю. В этот момент вся энергия контура собрана в конденсаторе. Напротив, ток максимален по величине, когда заряд обращается в ноль – в этот момент вся энергия контура собрана в катушке. Эта формула очень важна для решения задач! Например: если мы знаем амплитуду колебаний напряжения на конденсаторе U_m, то для любого момента времени мы можем найти величину тока $|I(t)|$ по напряжению $U(t)$. В самом деле:

$$\frac{LI^2}{2} + \frac{CU^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2} \Rightarrow |I(t)| = \sqrt{\frac{C}{L}[U_m^2 - U^2(t)]}.$$

Определим с помощью этого соотношения величину силу тока в контуре, в котором колебания напряжения описаны в таблице, приведенной выше, в момент времени $t = 2$ мкс. Заметим для этого, что $\frac{C}{L} = \frac{C^2}{LC} = \frac{4\pi^2 C^2}{T^2}$. Значит, $|I(t)| = \frac{2\pi C}{T}\sqrt{U_m^2 - U^2(t)}$. Подставляя $U_m \approx 4$ мВ, $T = 12$ мкс и $U(t) = 2$ мВ, находим: $I(t) \approx 0{,}3$ А.

При появлении в контуре сопротивления колебания становятся **затухающими** (энергия колебаний постепенно уменьшается из-за выделения тепла в сопротивлении). Естественно, выделяющееся тепло можно рассчитать по убыли энергии контура.

При включении в контур источника периодической ЭДС возникают **вынужденные** колебания. При **совпадении** частоты вынуждающей ЭДС и собственной частоты колебаний контура происходит **резонанс** – амплитуда вынужденных колебаний резко возрастает. Если подключенная к источнику переменной ЭДС схема сложнее, чем «просто» колебательный контур (например, содержит сопротивления или диоды), ее называют цепью переменного тока. Важным примером переменного тока является **синусоидальный** – ток, меняющийся по закону синуса $I(t) = I_m \sin(\omega t)$. В случае переменного тока понятие «сила тока» требует уточнения – речь может идти о **мгновенном значении** силы тока $I \equiv \frac{dq}{dt} \equiv q'$, о **среднем значении** силы тока за время t $\bar{I} \equiv \frac{\Delta q}{t}$ (ясно, например, что среднее значение синусоидального тока за период равно нулю), или о **действующем значении** силы тока: так называют величину силы <u>постоянного</u> тока, энергетическое (например, тепловое) действие которого совпадает с действием рассматриваемого переменного. Например, действующее значение синусоидального тока в сопротивлении вычисляется по выделению тепла: мгновенное значение мощности тепловых потерь $P(t) = U(t) \cdot I(t) = RI^2(t) = R \cdot I_m^2 \sin^2(\omega t)$: $Q_R = \int_0^T R \cdot I_0^2 \sin^2(\omega t)\, dt = \frac{1}{2} I_0^2 RT \equiv \tilde{I}^2 RT \Rightarrow \tilde{I} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$, то есть действующее значение синусоидального тока в $\sqrt{2}$ раз меньше амплитудного. Привычное нам напряжение бытовой сети переменного тока 220 В – это действующее значение, так что амплитуда колебаний напряжения в бытовой сети $U_m = \sqrt{2} \cdot 220\text{В} \approx 311\text{В}$.