11 класс, Экспресс-подготовка к ЕГЭ по физике.

Теоретический обзор к занятию 3.

Темы: закон сохранения энергии, закон сохранения импульса.

При изучении движения одного тела или системы тел обычно используются уравнения движения, следующие из законов Ньютона. Но иногда для системы тел эти уравнения оказываются очень сложными, и тогда удобно вместо решения уравнений движения использовать **законы сохранения**, связывающие значения скоростей и координат тел в различные моменты времени. Как обсуждалось в предыдущей теме, уравнения движения – уравнения относительно **ускорений** тел, в то время как законы сохранения позволяют сразу находить **скорости** тел в зависимости от координат или по окончании процессов взаимодействия.

Задания, посвященные законам сохранения, довольно часто используются в качестве задания 30, в котором требуется не только решить задачу, но и перечислить использованные законы, а также обосновать возможность их применения в данной задаче. Поэтому при изучении законов сохранения важно обращать внимание не только на сохраняющуюся величину, но и на **условия**, при которых эта величина сохраняется.

В заданиях ЕГЭ необходимо знание следующих законов сохранения и связанных с ними законов:

Закон изменения кинетической энергии.

Кинетическая энергия материальной точки определяется соотношением $E_K \equiv \frac{mv^2}{2}$, кинетическая энергия системы точек – сумма их кинетических энергий. С помощью второго закона Ньютона можно доказать, что

- ***изменение кинетической энергии тела равно работе сил, действующих на тело***:

$$\Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right) \approx m\vec{v}\Delta\vec{v} = m\vec{a}\vec{v}\Delta t = \vec{F}\Delta\vec{r} \equiv \Delta A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_к^{(2)} - E_к^{(1)} = A_{12}.$$

Важно обратить внимание на входящее сюда определение работы силы: при перемещении тела на $\Delta\vec{r}$ работа силы $\vec{F}$ определяется через скалярное произведение: $\Delta A \equiv \vec{F}\Delta\vec{r} \equiv |\vec{F}||\Delta\vec{r}|\cos\alpha$ (здесь α – угол между векторами силы и перемещения). Силы, действующие в механической системе, могут быть разделены на **потенциальные** (или **консервативные**) и **диссипативные** в зависимости от того, как они меняют кинетическую энергию тела – возвратным или безвозвратным образом. Например, при движении тела вверх в поле тяжести оно теряет кинетическую энергию за счет работы силы тяжести вплоть до полной остановки, но затем оно движется вниз, и при этом его кинетическая энергия уже возрастает – вновь за счет работы силы тяжести, т. е. сила тяжести «возвращает» отнятую энергию. Поэтому сила тяжести – потенциальная (консервативная). Можно рассматривать этот процесс как переход механической энергии из одной формы в другую – из кинетической в потенциальную и обратно. Итак: для потенциальных сил можно ввести энергетическую характеристику – **потенциальную энергию**. Определим ее как такую функцию координат тел, разность значений которой в двух точках равна работе этих сил при перемещении тела между этими точками:

$$U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) = A_{12}.$$

Видно, что потенциальная энергия определена с точностью до постоянного слагаемого (есть произвол в выборе точки, в которой ее значение принимается равным нулю).Если ввести понятие **полной механической энергии** как суммы кинетической и потенциальной энергий всех входящих в рассматриваемую систему тел, то можно сформулировать следующий закон сохранения.

Закон сохранения полной механической энергии:

- ***Если в замкнутой механической системе все действующие силы являются потенциальными, то полная механическая энергия этой системы сохраняется в процессе движения:*** $(E_к + U)_1 = (E_к + U)_2$.

Итак, одним из возможных наборов **условий**, обеспечивающих сохранение полной механической энергии, является **замкнутость системы** (внешние силы отсутствуют, и, следовательно, не совершают работы) и **потенциальность** всех сил.
Отметим, что «возвратность» забираемой силой энергии можно установить по следующему признаку (*признак потенциальности*): если перемещать тело по замкнутой траектории, то работа потенциальной силы должна равняться нулю. Следствием этого свойства является то, что работа потенциальной силы при переносе тела из точки 1 в точку 2 не зависит от пути переноса и ее можно представить как разность значений некоторой функции координат – потенциальной энергии (именно поэтому введенное выше определение корректно).
Противоположный пример дает нам сила трения: забрав у тела его кинетическую энергию, она не будет разгонять его после остановки – здесь энергия тела переходит в <u>немеханическую</u> форму (в тепло). Такие силы называются диссипативными, и в их присутствии механическая энергия **убывает**. В этом случае действует другой закон.

Закон изменения полной механической энергии:

- ***Изменение полной механической энергии замкнутой системы равно работе непотенциальных (обычно диссипативных) сил:***

$$E_2 - E_1 \equiv (E_K + U)_2 - (E_K + U)_1 = A_{12}^D.$$

Работа диссипативных сил всегда отрицательна.
Есть один тип сил, на которые нужно обратить особое внимание, так как их роль с точки зрения энергетического подхода совершенно не похожа на другие. Это силы, которые всегда **перпендикулярны скорости** тела (если отличны от нуля): силу Лоренца, действующую на заряженное тело в постоянном магнитном поле, силу нормальной реакции поверхности, сила натяжения «свободно изгибающейся» нити. Работа таких сил во всех случаях тождественно **равна нулю**, поэтому они не изменяют механическую энергию тел. В уравнениях, выражающих закон сохранения (либо изменения) механической энергии такие силы учитывать не надо.

Приведем наиболее часто используемые в задачах по материалам школьного курса физики выражения для потенциальной энергии:
А) потенциальная энергия тела на высоте h в однородном поле тяжести (энергия взаимодействия с массивным близко расположенным телом): $U = mgh$.

Б) потенциальная энергия деформированной пружины (величина деформации – x): $U = \dfrac{k x^2}{2}$
.
В) потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух тел на расстоянии r_{12}: $U = -G\dfrac{m_1 m_2}{r_{12}}$.

Г) потенциальная энергия электростатического взаимодействия заряженных тел на расстоянии r_{12}: $U = k\dfrac{q_1 q_2}{r_{12}}$, $\quad k \equiv \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

Перейдем еще к одному важному примеру закона сохранения.

Закон сохранения импульса.

- ***Полный импульс замкнутой механической системы остается неизменным в процессе движения:*** $\vec{p}\,|_{t=t_2} = \vec{p}\,|_{t=t_2}$.

Напомним, что ***замкнутой*** механическая система называется в том случае, когда сумма внешних сил, действующих на входящие в нее тела, равна нулю. С учетом этого легко связать этот закон с третьим законом Ньютона. В самом деле, изменение импульса тела можно связать с **импульсом силы**: $\Delta\vec{p} = m\cdot\Delta\vec{v} = \vec{F}\cdot\Delta t$, поэтому изменение полного импульса для простейшей замкнутой системы, состоящей из двух взаимодействующих материальных точек $\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = (\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12})\cdot\Delta t = 0$, именно в соответствии с третьим законом. Аналогично и для замкнутой системы из большего числа тел изменение импульса определяется суммой всех внутренних сил, которую можно разбить на пары сил, с которыми тела действуют друг на друга, и поэтому изменение полного импульса будет равно нулю. Следует отметить, что встречаются ситуации, когда система является замкнутой только в проекции на какое-либо направление – например, если равна нулю только x-проекция суммы внешних сил. Тогда сохраняется только соответствующая проекция полного импульса. Кроме того, закон сохранения импульса может быть применен для незамкнутых систем при описании «быстрых» процессов. В этом случае, если за малое время (такое, что импульс внешних сил много меньше импульсов тел системы) импульс тел системы изменяется значительно, то это означает, что внутренние силы много больше внешних. В пределе «мгновенного» изменения внутренние силы становятся бесконечно большими, и тогда действием внешних сил за время процесса можно пренебречь, и рассматривать систему как замкнутую.

Ясно также, что ***изменение полного импульса незамкнутой системы равно суммарному импульсу внешних сил***: $\Delta\vec{P} = (\sum\vec{F}_{ex})\cdot\Delta t$.

В решении заданий ЕГЭ законы сохранения используются в трех случаях:

1) задачи на анализ изменения скорости в процессе движения под действием потенциальных сил; если известна (или достаточно легко находится) функция потенциальной энергии и известна кинетическая энергия (либо скорость) тела в некоторой точке, то из закона сохранения полной механической энергии можно найти его скорость в любой точке и определить, в какие точки тело вообще не может попасть.
2) задачи на анализ изменения сил и ускорений тел при криволинейном движении; закон сохранения полной механической энергии $\frac{m\vec{v}^2}{2} + U(\vec{r}) = const = E_0$ удобно использовать вместе с уравнением движения для центростремительной компоненты ускорения $m\frac{\vec{v}^2}{R} = F_n$, поскольку он содержат одну и ту же величину – квадрат скорости.
3) задачи о *соударениях* тел; так мы будем называть задачи о взаимодействии тел при столкновениях, когда либо система сталкивающихся тел замкнута, либо столкновение происходит за очень малое время, позволяющее пренебрегать влиянием всех сил, кроме сил взаимодействия между сталкивающимися телами.

Приведем стандартную классификацию соударений. Обычно их разделят на:

- упругие и неупругие соударения – по отношению к закону сохранения механической энергии. Упругие соударения – такие, в которых потери механической энергии пренебрежимо малы (идеализированные соударения, в которых такие потери отсутствуют полностью, называют *абсолютно упругими*). Если потери механической энергии есть, то соударения называют неупругими. *Абсолютно неупругими* называют столкновения, в которых потери механической энергии – *максимально возможные* для данных сталкивающихся тел. При абсолютно неупругом соударении относительное движение тел прекращается – например, тела «**слипаются**» и движутся **вместе** после соударения.
- центральные и нецентральные соударения – по положению соударяющихся тел по отношению к *линии удара* (так называют линию действия сил, возникающих при соударении; для гладких тел ее можно построить как прямую, проходящую через точку касания соударяющихся тел и перпендикулярную плоскости соприкосновения). Центральным называют соударение, при котором линия удара проходит через центры масс тел. В материалах ЕГЭ нецентральные соударения практически не упоминаются,

поскольку их описание выходит за рамки программ базового уровня (в результате таких соударений тела, изначально двигавшиеся поступательно, начинают вращаться, если нет внешней причины, препятствующей их вращению).

- лобовые и нелобовые (косые) соударения – по ориентации направления движения тел по отношению к линии удара. Лобовым называют соударения, в которых тела до и после соударения движутся поступательно вдоль линии удара.

Самые простые соударения – лобовые.

Например, при **абсолютно неупругом лобовом ударе** тел с массами M и m, летевших навстречу друг другу со скоростями V и v, образуется тело с массой $M+m$. Скорость этого тела можно найти только из одного закона сохранения импульса в проекции на направление движения тела M: $MV-mv=(M+m)V' \Rightarrow V'=\dfrac{MV-mv}{M+m}$. Закон сохранения энергии в общем виде (механическая энергия не сохраняется, так как часть ее переходит в тепло и во внутреннюю энергию тел) позволяет найти потери механической энергии как разность кинетической энергии тел до удара и после удара:

$$Q=E-E'=\frac{MV^2}{2}+\frac{mv^2}{2}-\frac{(M+m)V'^2}{2}=\frac{mM(V+v)^2}{2(M+m)}.$$

Например, при $V=v$ $Q=\dfrac{2mMV^2}{M+m}$, то есть относительные потери механической энергии $Q=\dfrac{4mM}{(M+m)^2}$.

Другой важный пример – **упругое лобовое соударение** двух тел, одно из которых (массой M) до удара покоилось, а другое (массой m) налетало на него по линии удара со скоростью v_0, можно проанализировать в общем виде. Из законов сохранения энергии и импульса (второй закон записывается в проекции на линию удара) можно найти конечные скорости тел:

$$\left\{\begin{aligned} mv_0 &= mv+MV \\ \frac{mv_0^2}{2} &= \frac{mv^2}{2}+\frac{MV^2}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} v &= \frac{m-M}{m+M}v_0 \\ V &= \frac{2m}{m+M}v_0 \end{aligned}\right..$$

С законом сохранения импульса связано возникновения одного важного класса сил, которые встречаются в вопросах и задачах. Это - ***реактивные силы*** (силы «отдачи»), то есть силы, с которыми выбрасываемые тела («топливо») действуют на выбрасывающее их тело («ракету»). В каждом конкретном случае могут иметь разную природу, но их всегда можно вычислить, исходя из закона сохранения импульса: если за малое время Δt выбрасывается малая масса топлива, равная $\Delta m << m$ со скоростью истечения u (относительно ракеты, двигавшейся до выброса со скоростью $\vec{v}$), то «оставшаяся» часть ракеты с массой $m-\Delta m$ разгоняется до скорости $\vec{v}+\Delta\vec{v}$, а выброшенная масса Δm движется относительно «неподвижной» системы со скоростью $\vec{v}+\Delta\vec{v}+\vec{u}$. Значит, в соответствии с законом сохранения импульса

$$m\cdot\vec{v}=(m-\Delta m)\cdot(\vec{v}+\Delta\vec{v})+\Delta m\cdot(\vec{v}+\Delta\vec{v}+\vec{u}) \Rightarrow m\cdot\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=-\frac{\Delta m}{\Delta t}\cdot\vec{u}\equiv\vec{F}_p.$$

В этом вычислении силы мы пренебрегли малым изменением массы ракеты за счет выброса топлива (строго говоря, разогнанная масса – не m, а $m-\Delta m$). Однако для «мгновенного» значения силы ($\Delta t\to 0$, а значит и $\Delta m\to 0$) эта формула становится точной.

Подводя итог, составим «общую схему» решения задач на использование законов сохранения:

Шаг 0: Перечислить (лучше всего – изобразить на схематическом рисунке) **все** силы, действующие на каждое из тел рассматриваемой системы, определить, все ли они являются потенциальными, является ли система замкнутой. Тем самым устанавливается, какие законы сохранения применимы при описании различных процессов в предлагаемой системе.

Шаг 1: Выбрать **инерциальную** СО и СК, обеспечивающие наиболее простую запись выражений для кинетической и потенциальной энергий системы, записать эти выражения.

Шаг 2: Записать закон сохранения (изменения) механической энергии и (или) закон сохранения (изменения) импульса.

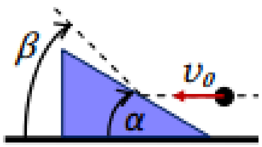
Шаг 3: Записать через те же величины заданную в условии дополнительно информацию (геометрические соотношения, соотношения сил, скоростей, энергий).

Шаг 4: Из записанных соотношений выразить искомую величину.

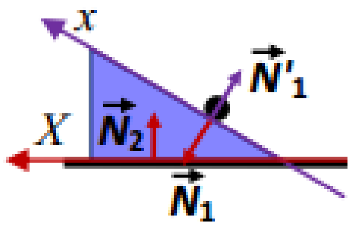
Отметим признаки, по которым можно «опознать» задачи на законы сохранения. Это задачи, в которых нельзя «решить» систему уравнений движения (например, силы зависят от координат, движения носят сложный характер и т.д.), но можно записать уравнения законов сохранения, связывающие «начальное» и «конечное» состояния системы. Еще одно важное соображение состоит в том, что закон сохранения энергии задает связь изменений скорости и положения тел, но не содержит информации о времени, за которое происходят изменения. Поэтому если в задаче присутствует вопрос о времени протекания процессов, ее не получится решить только на основе этого закона.

Приведем в качестве завершающего пример задание по теме «**закон сохранения импульса**», построенное по типу **задания № 30**:

Брусок, горизонтальное сечение которого имеет форму прямоугольного треугольника с углом α = 30°, лежит на горизонтальном льду. Одна из его вертикальных граней прижата к вертикальному борту. Однородная цилиндрическая шайба, скользившая по льду со скоростью $v_0 = 5$м/с, параллельной борту, сталкивается с бруском и отскакивает под углом β = 45° к борту (см. рисунок). Пренебрегая всеми силами трения, найдите скорость бруска поле удара. Известно, что масса бруска в 3 раза больше массы шайбы, и что брусок после удара скользит вдоль борта, не отрываясь от него. Какие законы Вы использовали для описания взаимодействия шайбы и бруска? Обоснуйте их применимость к данному случаю. Сделайте рисунок с указанием сил, действующих на тела.



Обоснование: Будем считать систему отсчета, в которой борт неподвижен, инерциальной. Для решения задачи будем использовать закон сохранения проекции импульса тела или системы тел. Он выполняется в инерциальной системе отсчета, если соответствующая проекция результирующей силы, приложенной к телу (к телам системы), равна нулю. В данном случае вертикальные силы тяжести, действующие на брусок и шайбу, всегда уравновешиваются силами нормальной реакции льда. Так как силы трения отсутствуют, то силы, действующие на тела в горизонтальной плоскости – это силы взаимодействия бруска и шайбы ($\vec{N}_1$ и $\vec{N}_1'$ на рисунке), и сила $\vec{N}_2$, действующая брусок со стороны борта. Все тела гладкие, и ясно, что силы взаимодействия – это силы нормальной реакции, перпендикулярные поверхностям соприкосновения. Например, сила, действующая на шайбу со стороны бруска, перпендикулярна его грани. Поэтому, если направить ось x вдоль этой грани бруска, то проекция импульса шайбы на эту ось сохраняется. По той же причине сила, действующая со стороны борта на систему тел «брусок + шайба» в процессе удара, перпендикулярна борту. Значит, проекция импульса этой системы на ось X, направленную вдоль борта, сохраняется.



Решение: Запишем закон сохранения проекции импульса шайбы на ось *x*: $mv_0\cos(\alpha)=mv\cos(\beta-\alpha)$ (m – масса шайбы). Значит, скорость шайбы после удара $v=\dfrac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta-\alpha)}v_0$.

Закон сохранения проекции импульса системы «брусок + шайба» на ось X имеет вид: $mv_0=mv\cos(\beta)+3mV$. Поэтому скорость бруска $V=\dfrac{1}{3}[v_0-v\cos(\beta)]=\dfrac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{3\cos(\beta-\alpha)}v_0$, с учетом первого уравнения и тригонометрического соотношения $\cos(\beta-\alpha)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$. Подставляя численные значения углов, получаем, что $V\approx 0{,}61$м/с.