

## 11 класс, Экспресс-подготовка к ЕГЭ по физике

### Теоретический обзор к занятию 2.

#### Темы: задачи по статике и динамике в заданиях ЕГЭ.

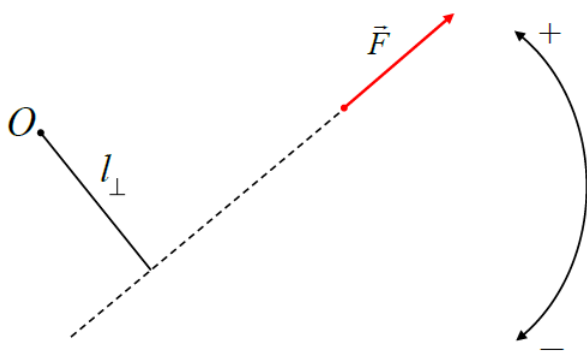
Задачи по темам «статика» и «динамика», могут встретиться в заданиях ЕГЭ-2022 под номерами 3, 5-8, 25 и 30.

В этом году появились задания (номер 30), в которых необходимо, помимо выполнения решения задачи, обосновывать применение используемых физических законов. В задачах, посвященных статике и динамике, это условия равновесия тела и законы Ньютона. Особо нужно обратить внимание на первый закон Ньютона – обычно не возникает необходимости сослаться на него непосредственно. Но важно понимать, что второй и третий законы Ньютона работают только в ИСО (инерциальных системах отсчета), существованию которых посвящен первый закон. Особенно это важно, если в ходе решения нужно перейти из системы отсчета, которая является инерциальной в соответствии с условием, в другую систему отсчета, движущуюся относительно исходной с постоянной скоростью. В этом случае важно не забыть записать утверждение, что новая система отсчета тоже является ИСО.

Изучение причин, по которым тела сохраняют либо изменяют состояние своего движения (покоя) приводит нас к введению понятий, характеризующих **взаимодействие тел**. Итак, новые определения:

**Сила** – количественная характеристика взаимодействия тел; векторная величина, описывающая интенсивность и направление воздействия.

**Плечо силы** – расстояние от оси вращения до линии действия силы.



**Момент силы** – произведение величины силы на ее плечо, взятое со знаком + (-), если сила вращает тело вокруг оси в положительном (отрицательном) направлении:  $M = \pm |\vec{F}| \cdot l$

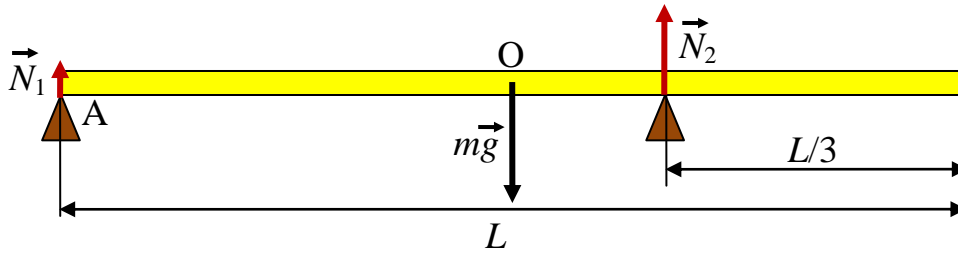
Основные уравнения **статики** – условия равновесия тел по отношению к инерциальным системам отсчета. Нахождение тела в покое (в *состоянии механического равновесия*) с необходимостью требует, чтобы влияние на него всех внешних воздействий было скомпенсировано. Поэтому необходимые условия равновесия тела в инерциальной системе отсчета имеют вид:

- (1) центр масс тела покоится только в том случае, если сумма внешних сил, действующих на тело, равна нулю:  $\sum \vec{F}_{\text{внеш}} = 0$  (1);
- (2) вращательное движение тела отсутствует только в том случае, если сумма моментов внешних сил равна нулю:  $\sum M_{\text{внеш}} = 0$  (2).

Отметим, что в последнем соотношении сумма моментов вычисляется с учетом знака (то есть с учетом направления). Кроме того, важно понимать, что, хотя момент заданной силы зависит от выбора точки (оси), относительно которой он вычисляется, разные формы записи (2) оказываются совершенно эквивалентны в системе уравнений, включающих (1)! Это означает, что точку начала отсчета (ось вращения) можно выбирать произвольно, исходя из удобства вычислений. Впрочем, если тело действительно вращается вокруг некоторой закрепленной оси в пространстве, то обычно удобнее всего считать моменты внешних сил

именно относительно этой оси, так как тогда в (2) не входит момент силы реакции этой оси (она имеет нулевое плечо).

Например: Пусть горизонтальная однородная балка массы  $m$  лежит на двух опорах, одна из



которых находится под краем балки, а другая – на расстоянии трети длины балки от другого края. Во сколько раз отличаются силы реакции опор? Уравнение моментов относительно

точки А (первой опоры) имеет вид:  $+N_2 \cdot \frac{2L}{3} - mg \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{3}{4}mg$ . Уравнение моментов

относительно точки О (центра стержня):  $+N_2 \cdot \frac{L}{6} - N_1 \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow N_2 = 3N_1$ . Второе уравнение

нам удобнее, так как из него сразу получается ответ на вопрос. Но почему эти уравнения разные? Дело, как отмечалось ранее, в том, что **в системе** с уравнением равновесия сил  $N_1 + N_2 = mg$  они действительно становятся эквивалентны. В самом деле, из этого

уравнения и уравнения моментов относительно А видно, что  $N_1 = mg - N_2 = \frac{1}{4}mg$ , и ответ

остается прежним:  $N_2 = 3N_1$ .

Для правильного составления уравнений равновесия важно четко уметь определять для каждой из сил, действующих на тело, три ее характеристики: **величину**, **направление** и **точку приложения**. Величина и направление равнодействующей нескольких сил определяется векторной суммой этих сил, а точка приложения равнодействующей определяется из условия, чтобы ее момент равнялся сумме моментов этих сил. Перечислим силы, встречающиеся в задачах ЕГЭ:

**Сила тяжести (тяготения)** – появляется вследствие гравитационного взаимодействия, в котором участвуют все материальные тела. В «традиционной» форме закон всемирного тяготения: «*Все тела притягивают друг друга с силой, пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними*» он применим к материальным точкам: сила  $\vec{F}_{12}$ , с которой точечное тело 1 действует на точечное тело 2,

$$|\vec{F}_{12}| = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}, \text{ или } \vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \cdot \vec{r}_{12} \text{ (здесь } \vec{r}_{12} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \text{)}$$

Сила гравитационного притяжения протяженных тел определяется как сумма сил притяжений пар материальных точек, из которых они состоят. Вблизи поверхности тела больших размеров (например, Земли) поле сил тяжести можно считать однородным и вычислять силу тяжести по формуле  $\vec{F} = m\vec{g}$  ( $g \approx \frac{GM}{R^2}$ ), где направление вектора ускорения свободного падения – это направление вертикали. Точкой приложения силы тяжести (центром тяжести) в этом случае является центр масс тела.

**Сила упругости** – противодействует деформации упругих тел (т.е. всегда направлена против нее). При малых деформациях сила упругости пропорциональна величине деформаций  $x$ :  $F = -kx$ . Коэффициент жесткости  $k$  для упругого тела постоянного сечения пропорционален величине сечения и обратно пропорционален длине тела:  $k = E \cdot \frac{S}{l}$  (здесь

$E$  – модуль Юнга, являющийся характеристикой вещества тела).

**Сила давления жидкости или газа** – на элемент поверхности площадью  $S$ , ограничивающий объем жидкости или газа, они оказывают давление с силой,

перпендикулярной элементу поверхности  $|\vec{F}| = p \cdot S$ . Давление  $p$  характеризует состояние вещества. Для идеальной жидкости давление на глубине  $h$  под поверхностью, давление на которую равно  $p_0$ , находится по формуле  $p = p_0 + \rho g$ . Давление идеального газа определяется его концентрацией и температурой в соответствии с основным уравнением молекулярно-кинетической теории.

**Архимедова сила** – в соответствии с законом Архимеда «на тело, погруженное в жидкость или газ, действует выталкивающая сила, равная по величине весу жидкости или газа в объеме погруженной части тела»:  $\vec{F}_A = -\rho_{ж} V_{погр} \vec{g}$ . Эта сила на самом деле является равнодействующей всех сил давления, действующих на поверхность тела. Сила Архимеда приложена к точке, которая совпадает с центром масс жидкости в объеме погруженной части тела («центру плавучести»), и направлена по кратчайшему расстоянию к свободной поверхности жидкости (перпендикулярно линиям постоянного давления), т.е. обычно – вертикально вверх.

**Электрические и магнитные силы** – возникают благодаря электромагнитному взаимодействию. Например: два заряженных тела в вакууме взаимодействуют друг с другом по закону Кулона:

$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$ . (знак «+» соответствует притяжению, «-» -

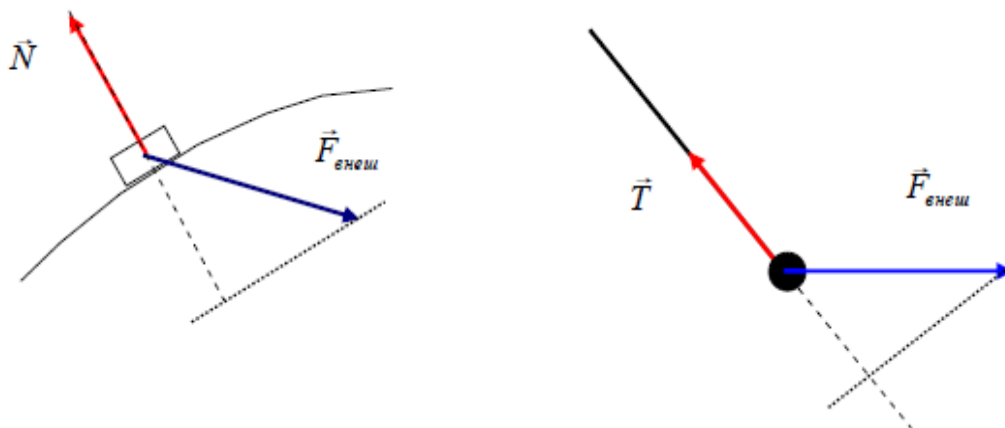
отталкиванию). На заряженные тела в электрическом поле с напряженностью  $\vec{E}$  действует сила  $\vec{F} = q\vec{E}$ , а в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  – сила Лоренца  $\vec{F}_L = q[\vec{v}\vec{B}]$ ,  $|\vec{F}_L| = qvB \sin \alpha$ . Сила Лоренца, действующая на движущиеся носители заряда, является причиной появления силы Ампера, действующей на отрезок проводника с током в магнитном поле  $\vec{F}_A = I[\vec{l}\vec{B}]$ .

Особую роль в задачах статики играют **силы реакции**. Их отличительная черта состоит в том, что их величина, направление и точка приложения могут изменяться при изменении прочих сил, действующих на тело. Обычно именно эти силы обеспечивают равновесие, то есть их характеристики в данных условиях определяются именно из уравнений (1,2). Если характеристики сил реакции не могут принять значения, определяемые условиями равновесия, то равновесие нарушается – тело приходит в движение. Силы реакции обычно имеют электромагнитную природу – это равнодействующие сил межмолекулярных взаимодействий. В заданиях ЕГЭ возникают следующие силы реакции:

**Силы реакции опор и подвесов:**

**Сила нормальной реакции** твердой опоры  $\vec{N}$  направлена «наружу» перпендикулярно поверхности опоры, в точности уравновешивая перпендикулярную опоре составляющую внешней силы. Сила реакции обращается в ноль при отрыве тела от опоры.

**Сила натяжения** нерастяжимого подвеса  $\vec{T}$  направлена по линии подвеса, в точности уравновешивая продольную (растягивающую подвес) составляющую внешней силы. Сила натяжения обращается в ноль при провисании подвеса.



**Сила трения** – сила, противодействующая относительному движению соприкасающихся поверхностей тел. Эта сила возникает как благодаря механическому «зацеплению» мелких

неровностей трущихся поверхностей, так и благодаря действию сил притяжения между молекулами тел («сил молекулярного сцепления»). Конечно, на самом деле между прижатыми телами возникает единая сила взаимодействия, которую при описании результатов этого взаимодействия оказалось удобно разделять на нормальную ( $\vec{N}$ ) и касательную ( $\vec{F}_{mp}$ ) по отношению к поверхности соприкосновения компоненты.

Для *сухого трения* различают случаи трения покоя и трения скольжения: тело покоится, пока сила трения в точности уравнивает составляющую внешней силы вдоль трущихся поверхностей. При этом величина силы трения не превосходит некоторого максимального значения, которое зависит от величины силы нормальной реакции поверхности:  $\vec{F}_{mp} = -\vec{F}_{||}$ ,  $|\vec{F}_{mp}| \leq F_{\max} = \mu N$  ( $\mu$  - коэффициент трения). Когда внешняя сила превосходит это максимальное значение, тело начинает скользить.

Отметим, что при рассмотрении взаимодействующих тел, в соответствии с третьим законом Ньютона, все силы обязательно появляются «парами»: если тело 1 действует на тело 2 с силой  $\vec{F}_{12}$ , то второе тело действует на первое с силой **той же природы** (гравитационной, электромагнитной, силой нормальной реакции, трения и т.д.)  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ . Если у этих тел есть два, три или более механизмов взаимодействия, появится столько же «пар» сил. Важно понимать, что эти силы приложены к **разным** телам (то есть силы из одной пары не могут входить, например, в одно условие равновесия для какого-либо из тел системы).

Итак, «общая схема» решения задач статики:

**Шаг 0:** Перечислить (лучше всего – изобразить на схематическом рисунке) **все** силы, действующие на каждое из тел рассматриваемой системы.

**Шаг 1:** Выбрать СО и СК, обеспечивающие наиболее простую запись условий равновесия. В частности, обычно выгодно направлять координатные оси по направлениям действия большинства сил, а начало координат – таким образом, чтобы как можно больше «неудобных» (с точки зрения ответа на поставленный вопрос) сил имели нулевое плечо относительно этого начала координат. Тогда эти силы не войдут в уравнение, следующее из условия (2).

**Шаг 2:** Записать условия равновесия (1) и (если нужно) (2).

**Шаг 3:** Записать через те же величины заданную в условии дополнительную информацию (геометрические соотношения, соотношения сил).

**Шаг 4:** Из записанных соотношений выразить искомую величину.

Если равновесие нарушено, то вместо изучения условий равновесия нам необходимо анализировать характер движения, связанный с взаимодействием тел. Таким образом, от задач статики мы переходим к задачам **динамики**: нахождение закона движения тел по заданным силам (прямая задача) и нахождение сил по закону движения (обратная задача). Для движения материальной точки и поступательного движения твердого тела эти задачи решаются с использованием уравнений движения, следующих из второго закона Ньютона: в инерциальной системе отсчета ускорение тела определяется равнодействующей внешних сил, приложенных к этому телу:  $m\vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{внеш}}$ . Проще всего решать такие уравнения при движении тела под действием постоянных сил – тогда из этого уравнения находится постоянное ускорение, что позволяет сразу записать закон движения.

Но иногда одних уравнений движений оказывается недостаточно. Это происходит, если движение одного или нескольких тел подчинено некоторым ограничениям – например, тела могут двигаться по направляющим, или могут быть соединены нитью. Такие ограничения называют *кинематическими связями*. Их математическая запись позволяет получить соотношения между координатами, скоростями и ускорениями тел – *уравнения кинематической связи*. Ясно, что обычно существует реальная физическая причина, приводящая к возникновению связи. Как правило, выполнение ограничений, накладываемых связями, обеспечивается действием *сил реакции* – сил натяжения нитей, сил нормальной реакции твердых тел и сил трения. Поэтому при решении задач, в которых возникают

уравнения кинематической связи, важно обращать внимание на два обстоятельства. Во-первых, количество независимых уравнений связи должно быть равно количеству сил реакции, действующих в системе. Дело в том, что силы реакции не имеют заданных значений – они принимают как раз те значения, которые обеспечивают движения со связями. Поэтому они являются неизвестными величинами наряду с ускорениями тел вдоль координатных осей. Количество же независимых *уравнений движения*, следующих из второго закона Ньютона, очевидно равно числу этих ускорений. Поэтому для получения полной системы уравнений к уравнениям движения необходимо добавить по уравнению связи на каждую силу реакции. Во-вторых, для многих сил реакции существуют «пределы возможностей», при выходе за которые сила реакции уже не может обеспечить выполнение ограничений связи, и связь «разрушается» - нити провисают, тела начинают деформироваться или проскальзывать и так далее.

Перечислим наиболее часто встречающиеся в задачах виды связей с указанием пределов их существования.

#### **Жесткий стержень:**

Если тела соединены жестким стержнем, то расстояние между ними остается неизменным, а проекции скоростей и ускорений на направление стержня совпадают. Если рассматривается вращательное движение, то совпадают угловые скорости и угловые ускорения тел. Сила реакции, обеспечивающая связь – *сила упругости* стержня. Абсолютно жесткий стержень выдерживает любую внешнюю нагрузку, не деформируясь. Реальные стержни имеют предельные значения нагрузки, выше которых они начинают деформироваться. Если такой предел в задаче задан, то условие существования связи  $|\vec{F}_{упр}| \leq F_{max}$ .

#### **Нерастяжимая нить:**

В данном случае, пока нить натянута, она создает ограничения, во многом схожие с предыдущим случаем: расстояние между связанными телами остается неизменным, а проекции скоростей и ускорений на направление нити совпадают. Отличия же состоят в следующем: во-первых, нить может свободно изгибаться (вокруг блока, балки и т.д.), оставаясь натянутой; во-вторых, нить не может «сжиматься» - при уменьшении расстояния между телами она провисает. Сила реакции – *сила натяжения нити*, и условием существования связи является выполнение требования  $0 \leq T \leq T_{max}$ . При  $T = 0$  нить провисает, а при  $T = T_{max}$  - рвется. Обычно в задачах ЕГЭ рассматриваются только «идеальные» (то есть невесомые и нерастяжимые) нити, перекинутые через «идеальные» (недеформируемые гладкие) балки или «идеальные» (невесомые, вращающие без трения и круглые) блоки. В этих случаях сила натяжения нити одинакова во всех ее точках.

#### **Соприкосновение жестких поверхностей тел:**

В этом случае, пока деформациями поверхностей можно пренебрегать, и пока тела не отрываются друг от друга, их смещения в направлении, перпендикулярном поверхности соприкосновения, должны быть равны. Поэтому равны и проекции скоростей и ускорений тел на соответствующую ось. Обеспечивает выполнение уравнений связи *сила нормальной реакции*, которая должна удовлетворять требованию  $0 \leq N \leq N_{max}$ . При  $N = 0$  происходит отрыв тел друг от друга, а при  $N = N_{max}$  - поверхности начинают существенно деформироваться.

#### **Отсутствие проскальзывания соприкасающихся тел:**

Этот вид связи может возникать как дополнение к предыдущему, если между соприкасающимися телами существует *сила трения*, способная обеспечить отсутствие проскальзывания. Тогда тела вообще не изменяют своего относительного положения – их скорости и ускорения совпадают. Условие существования связи:  $|\vec{F}_{mp}| \leq F_{mp}^{max} = \mu N$ .

Отметим, что реально в задачах ЕГЭ обычно рассматриваются системы, в которых действует не более одной связи, причем связанные тела совершают **прямолинейные движения**. В этом случае получение уравнения связи, дополняющего уравнения движения, возможно по следующей схеме: надо задать «произвольные» малые смещения всех тел по всем координатам, кроме одной (если в системе действуют две связи, то кроме двух) и

предположить, что связь «работает» (нить не провисает, тела не отрываются друг от друга и т.д.). Тогда можно найти обусловленную связью величину этого последнего смещения, которая будет записана через «заданные». Ясно, что из этого соотношения можно получить формулу, выражающую связь скоростей тел, а из нее – формулу, выражающую связь ускорений. Эта последняя формула и есть уравнение связи, которое надо добавить к системе уравнений движения для получения ответа.

При решении задач динамики **криволинейного движения** действующие на тело силы удобно разложить на касательную и нормальную (по отношению к траектории) составляющие. При этом каждая из этих компонент сил создает соответствующую

компоненту ускорения (касательную и центростремительную):  $\vec{a} = \vec{a}_{кас} + \vec{a}_{цс} = v'_t \cdot \vec{e}_{кас} + \frac{v^2}{R} \cdot \vec{e}_{цс}$

(здесь  $R$  - радиус кривизны траектории в заданной точке). В частности, если результирующая сила, действующая на тело в рассматриваемой задаче, перпендикулярна скорости, то у такого тела есть только центростремительная компонента ускорения, и модуль скорости тела не меняется (скорость изменяется только по направлению). Если и величина этой силы не будет меняться, то, как видно из формулы для центростремительного ускорения, будет оставаться неизменным и радиус кривизны траектории, то есть тело будет совершать равномерное вращение по окружности. Для анализа движения в подобных случаях обычно достаточно исходить из одного уравнения движения для

центростремительной компоненты ускорения:  $m \frac{v^2}{R} = F_n$ .

Примером такого движения является движение по круговой орбите в гравитационном поле сферически-симметричного объекта массы  $M$  (точечной массы, массивного однородного шара). С учетом закона всемирного тяготения получаем

$$m \frac{v^2}{R} = \frac{GmM}{R^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}},$$

то есть скорость движения для любого тела однозначно связана с радиусом орбиты. Можно также получить формулы, связывающие радиус орбиты с периодом обращения:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} R^{3/2}$$

(на самом деле этот результат – частный случай одного из *законов Кеплера*, который гласит, что квадраты периодов обращения тел, вращающихся вокруг одного массивного объекта относятся как кубы больших полуосей их эллиптических орбит).

Другие примеры движения по круговым орбитам – это движение в кулоновском электростатическом поле сферически-симметричного источника (анализ аналогичен проведенному для поля тяготения) и движение в однородном магнитном поле под действием *силы Лоренца*  $\vec{F}_L = q[\vec{v} \times \vec{B}]$ . Если частица движется в плоскости, перпендикулярной  $\vec{B}$ , то уравнение для центростремительной компоненты ускорения:

$$m \frac{v^2}{R} = |q| v B \Rightarrow v = \frac{|q| BR}{m}, R = \frac{mv}{|q| B}, T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \frac{m}{|q| B}.$$

«Общая схема» решения задач динамики:

**Шаг 0:** Перечислить (лучше всего – изобразить на схематическом рисунке) **все** силы, действующие на каждое из тел рассматриваемой системы.

**Шаг 1:** Выбрать СО и СК, обеспечивающие наиболее простую запись уравнений движения. В частности, обычно выгодно направлять координатные оси по направлениям действия большинства сил или по направлению прямолинейных движений тел.

**Шаг 2:** Записать уравнения движения тел системы.

**Шаг 3:** Записать (если это необходимо, то есть если в системе присутствуют связи, анализ которых необходим для получения ответа) уравнения связей для ускорений тел.

**Шаг 4:** Записать через те же величины заданную в условии дополнительно информацию (геометрические соотношения, соотношения сил, информацию о временных интервалах).

**Шаг 5:** Из записанных соотношений выразить искомую величину непосредственно либо (если вопрос предполагает исследование полученного движения) из законов движения тел, отвечающих найденным ускорениям.