Случайные величины

Виды случайных величин. Задание дискретной случайной величины.

Доцент Гончарова И.В.

Кафедра методологии социологических исследований

План лекции

1. Случайная величина.
2. Дискретные и непрерывные случайные величины.
3. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины (ДСВ).
4. Многоугольник распределения ДСВ.
5. Биномиальное распределение.
6. Распределение Пуассона.
7. Простейший поток событий.
8. Геометрическое распределение.
9. Гипергеометрическое распределение.

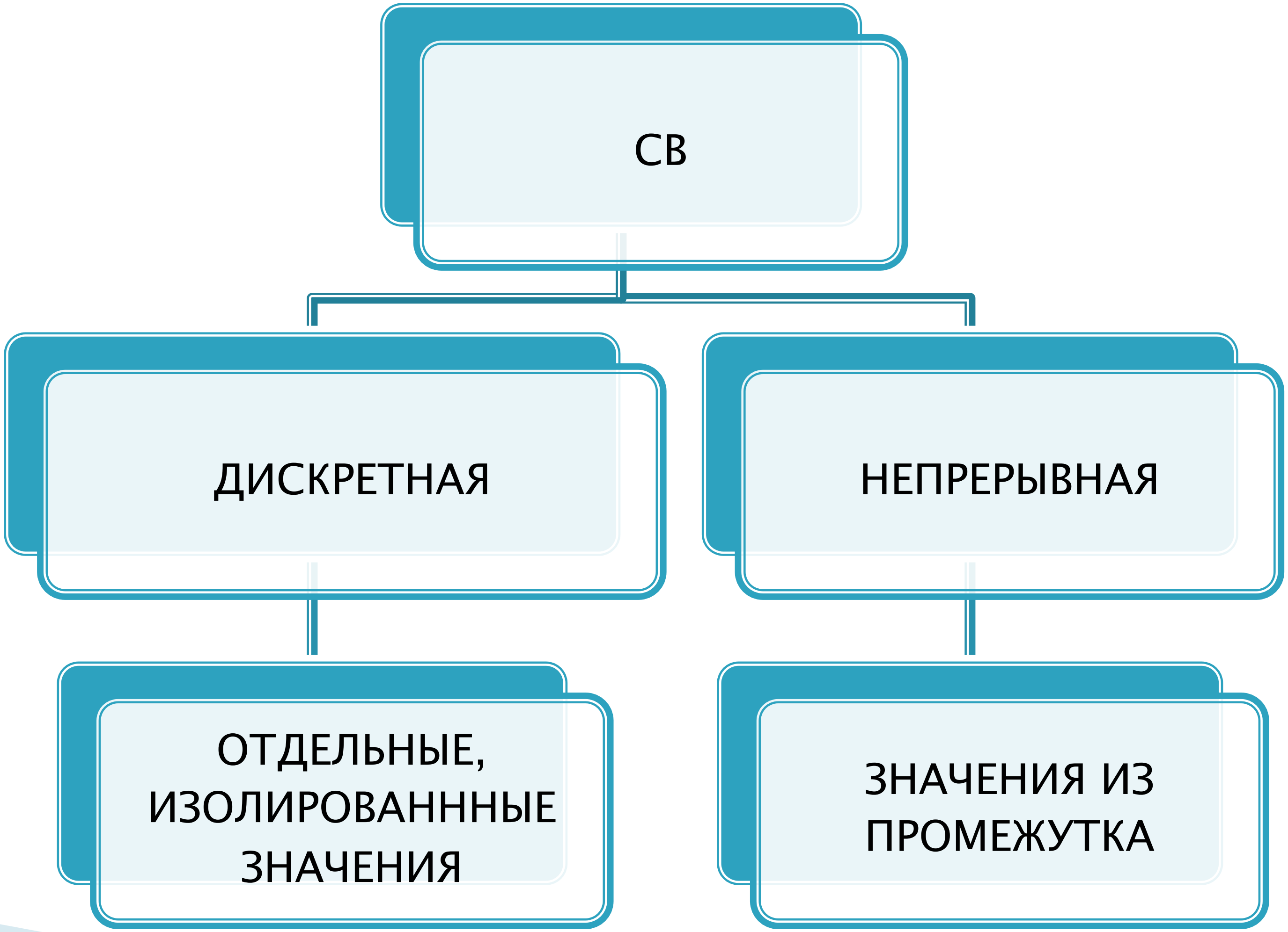
Случайная величина (СВ)

Определение. Случайной величиной (СВ) X называется величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем заранее неизвестно какое именно.

Пример 1. 100 абитуриентов. Число девушек – **случайная величина.** Ее значения: 0,1,2,…,100.

Пример2. Расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия, есть **случайная величина**. Ее значения – (a;b).

Дискретные и непрерывные случайные величины



Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины (ДСВ)

ЗНАЧЕНИЯ СВ

Вероятности СВ

Способы задания

- табличный
- графический
  - Многоугольник распределения

Табличный способ задания СВ

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	P_2	…	P_n

События $x_{1,}$ $x_{2,}$ …, x_n – образуют полную группу.

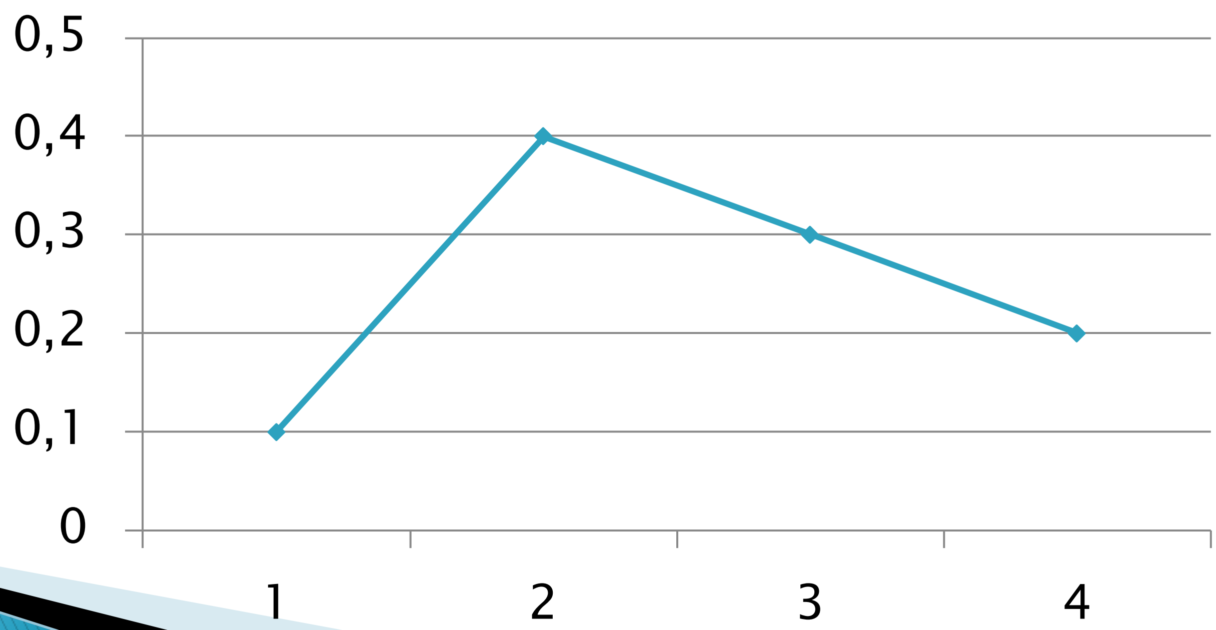
$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Если множество значений бесконечно (счетно), то ряд $p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots$ - сходится к 1.

Пример 3.

X	1	2	3	4
P	0,1	0,4	0,3	0,2

Графическое представление таблицы называется **многоугольником распределения.** При этом сумма всех ординат многоугольника распределения представляет собой вероятность всех возможных значений случайной величины, а, следовательно, равна единице.



Задача 1. Игральную кость бросают дважды. Таблица элементарных событий этого опыта нам известна. По горизонтали указано число очков, выпавшее на первой кости, по вертикали – на второй.

Рассмотрим возможные значения случайной величины – Сумма выпавших очков

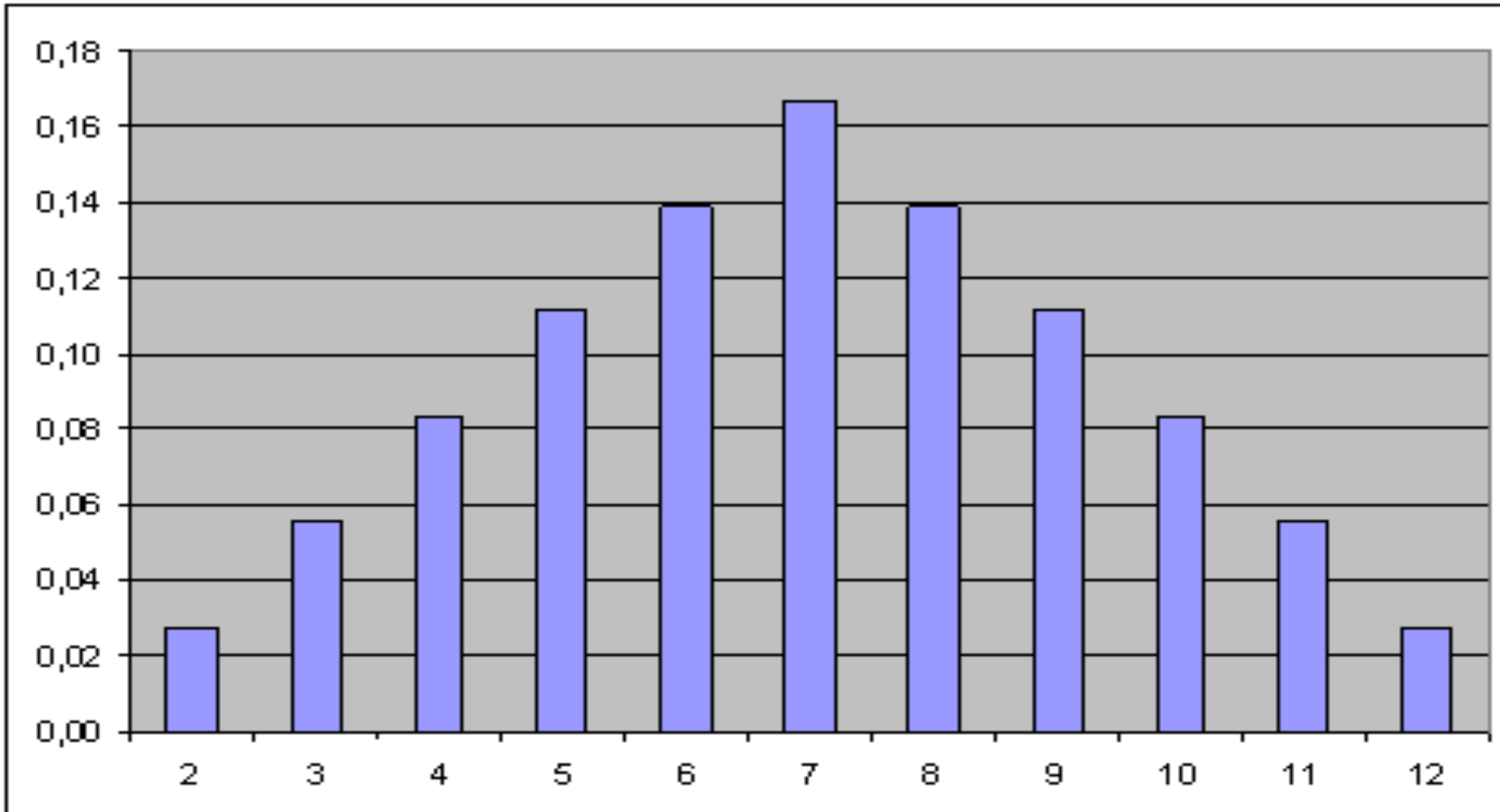
	1	2	3	4	5	6
1	1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6
2	2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6
3	3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6
4	4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6
5	5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6
6	6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6

X_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Сумма выпавших очков – случайная величина. Возможные значения этой суммы – натуральные числа от 2 до 12. С помощью таблицы элементарных событий можно вычислить распределение вероятностей между возможными значениями нашей случайной величины. Вычислим, например, вероятность того, что сумма очков равна 7. Выделены желтым цветом элементарные события, благоприятствующие этому событию. Их 6. Так как в этом опыте 36 равновозможных элементарных событий, вероятность каждого из них равна 1/36. Поэтому вероятность события «сумма очков равна 7» оказывается равна 6/36.

Таким же способом можно вычислить остальные вероятности и заполнить таблицу.

Многоугольник распределения для примера с игральной костью.



Биномиальное распределение

Задача2. Монета брошена 2 раза. Написать в виде таблицы закон распределения случайной величины X– числа выпадений «орла».

Решение. Вероятность появления «орла» в каждом бросании монеты $p=1/2$, вероятность непоявления «орла» $q=1/2$.

При двух бросаниях монеты «орел» может появиться либо 2 раза, либо 1 раз, либо совсем не появиться. Тогда возможные значения случайной величины X таковы: $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=0$.

Так как 1)проводится два независимых повторных испытания (монета бросается два раза), 2)каждое испытание имеет два исхода (появление, непоявление «орла»), 3)вероятность появления «орла» в каждом испытании постоянна, то можно применить формулу Бернулли:

$$P_2(2) = C_2^2 p^2 = (1/2)^2 = 0{,}25,$$

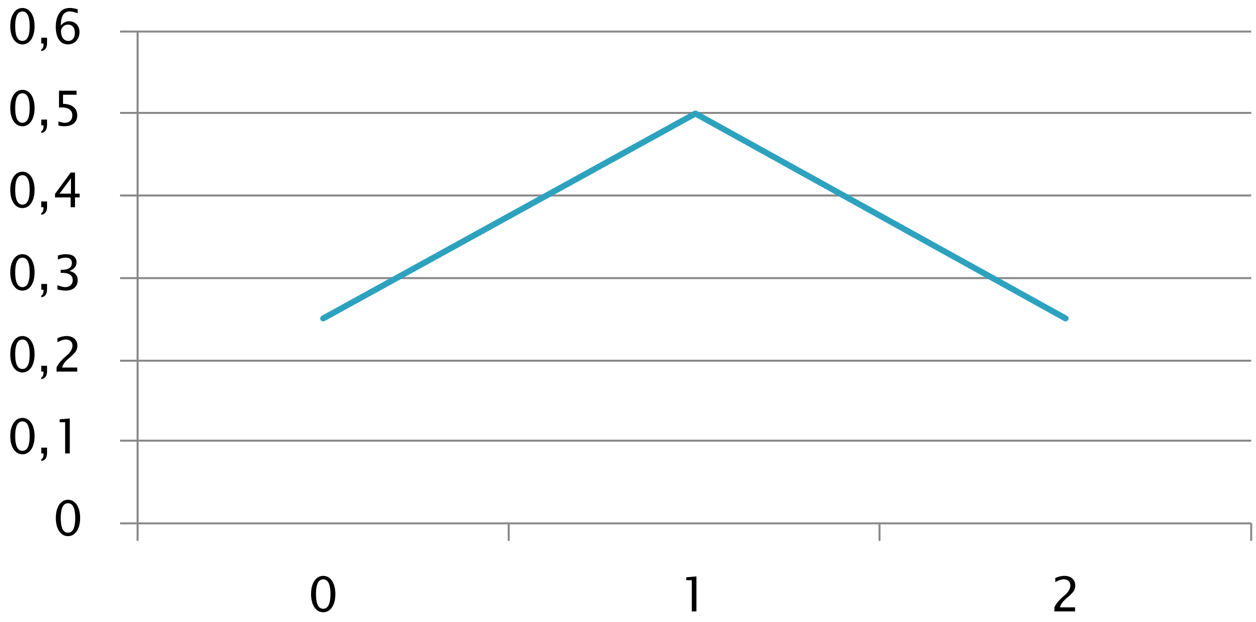
$$P_2(1) = C_2^1 pq = 2 \cdot (1/2) \cdot (1/2) = 0{,}5,$$

$$P_2(0) = C_2^0 q^2 = (1/2)^2 = 0{,}25.$$

Напишем закон распределения:

x_i	2	1	0
p_i	0,25	0,5	0,25

Построим многоугольник распределения:



Рассмотрим аналитическое выражение **биномиального закона** в общем виде.

Если производится **n** независимых испытаний, в каждом из которых событие **А** может появиться с одинаковой вероятностью **р** в каждом испытании, то вероятность того, что событие не появится равна **q = 1 – p**.

Примем число появлений события в каждом из испытаний за некоторую случайную величину Х.

Чтобы найти закон распределения этой случайной величины, необходимо определить значения этой величины и их вероятности.

В результате **n** испытаний событие может не появиться вовсе, появиться один раз, два раза, три и т.д. до **n** раз. Вероятность каждого значения этой случайной величины можно найти по формуле Бернулли.

Эта формула аналитически выражает искомый закон распределения.

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad \text{где } k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Распределение Пуассона.

В случае когда n – велико, p– мало ($p \leq 0{,}1$) подсчет по формуле Бернулли вызывает затруднения. В этом случае применяют **асимптотическую формулу Пуассона:**

$P_n(k) = \lambda^k e^{-\lambda}/k!$, где $np = \lambda$

Задача 3. Для проведения социологического исследования в типографии было отпечатано 5000 анкет. Вероятность того, что анкета при транспортировке повредится равна 0,0002. Найти вероятность того, что при опросе респондентов попадутся три непригодные анкеты.

Решение. По условию, $n=5000$, $p=0{,}0002, k=3$. Найдем $\lambda= np=5000*0{,}0002=1$. По формуле Пуассона искомая вероятность приближенно равна

$$P_{5000}(3)=\lambda^k e^{-\lambda}/k! = e^{-1}/3! = 1/6e \simeq 0{,}06.$$

Аналитическое выражение **закона Пуассона** в общем виде

n (велико)– независимых испытаний, **p** ($p \leq 0{,}1$)– вероятность появления события **A** в каждом испытании. Найти вероятность того, что событие **A** наступит **k** раз.

Допущение: **$np = \lambda$** (среднее число появлений события в различных сериях испытаний остается неизменным).

По формуле Бернулли:

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Так как **pn=λ**, то **p=λ/n.** Следовательно,

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Так как **n** – велико, то найдем предел вероятности при **n→∞**, при этом **p→0**

$$P_n(k) \simeq \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left[1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\right] =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}\cdot 1.$$

Простейший поток событий

Поток событий – последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени.

Прибытие самолета

Вызовы скорой помощи

Свойства потока (простейшего) Пуассоновского

- **ординарность**
  - Появление двух событий за малый промежуток времени невозможно
- **Отсутствие последействия**
  - Вероятность на промежутке не зависит от появления события «до» и «после»
- **стационарность**
  - Вероятность зависит от числа наступления события k и длительности промежутка t

Формула Пуассона

Вероятность наступления k событий за время **t**

$$P_t(k) = (\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t} / k!$$

Интенсивность потока λ– среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

Задача 4. Среднее число вызовов такси, поступающих диспетчеру, равно двум в одну минуту. Найти вероятность того, что за 5 минут поступит: а)2 вызова; б) менее двух вызовов; в) не менее двух вызовов. Поток вызовов предполагается простейшим.

Время t	**1минута**	**5 минут**	**5 минут**	**5 минут**
Среднее число вызовов	2 вызова	2 вызова	< 2 вызовов	≥ 2 вызовов
вероятность		?	?	?

Решение. λ=2, t=5, k=2 $P_t(k) = (\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}/k!$

а) $P_5(2) = 10^2 \cdot e^{-10}/2! = 100 \cdot 0{,}000045/2 = 0{,}00225.$

б) События «не поступило ни одного вызова» и «поступил один вызов» несовместны, поэтому по теореме сложения:

$$P_5(k < 2) = P_5(0) + P_5(1) = e^{-10} + (10 \cdot e^{-10})/1! = 0{,}000495.$$

в) События «поступило менее двух вызовов» и «поступило не менее двух вызовов» противоположны, поэтому

$$P_5(k \geqslant 2) = 1 - P_5(k < 2) = 1 - 0{,}000495 = 0{,}999505.$$

Геометрическое распределение

Задача 5. Двоечник сдает экзамен по теории вероятностей до первой успешной сдачи. Вероятность получения удовлетворительной оценки на экзамене $p=0,6$. Найти вероятность того, что двоечник сдаст экзамен с третьей попытки.

Решение: $0,4*0,4*0,6= 0,096$.

Аналитическое выражение геометрического распределения в общем виде

1. Производятся независимые испытания.
2. p ($0<p<1$) – вероятность появления события А в каждом.
3. $q=1-p$ – вероятность непоявления события А.
4. Испытание заканчивается, как только появится событие А. То есть, если событие А появилось в k-м испытании, то в предшествующих k-1 испытаниях оно не появлялось.

X – дискретная случайная величина (ДСВ)– число испытаний, которые нужно провести до первого появления события **A.**

Ее значения: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, ...

Пусть в первых **k-1** испытаниях событие A не наступило, в **k-м** – наступило.

Тогда по теореме умножения вероятностей,

$$P(X=k)=q^{k-1}\,p$$

Если k=1,2,..., то получаем **геометрическую прогрессию, где p– первый член, q– знаменатель**

$p, qp, q^2p, \ldots, q^{k-1}p, \ldots$

Данный ряд сходится и его сумма равна 1.

Действительно, сумма ряда $p/(1-q)=1$

Задача 6. Студент сдает экзамен либо до первой успешной сдачи, либо до полного израсходования попыток, число которых равно трем. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа попыток сдачи экзамена, если вероятность успешной сдачи экзамена при каждой попытке постоянна и равна 0,7. Постройте многоугольник распределения. Найдите $P(X<3)$.

X – случайная величина – число попыток сдачи экзамена, p= 0,7, q=1–0,7=0,3

x	1	2	3
p	0,7	0,21	0,09

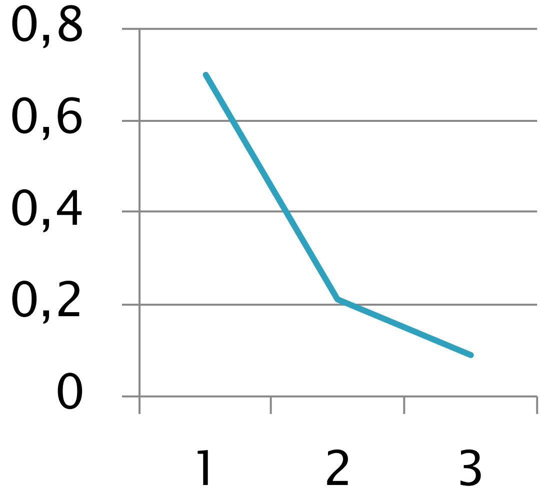
$P(X=k)=q^{k-1}\,p$

$P(X=1)=0{,}3^0\cdot 0{,}7=0{,}7$

$P(X=2)=0{,}3\cdot 0{,}7=0{,}21$

$P(X=3)=0{,}3^2\cdot 0{,}7+0{,}3^3=0{,}09$

Проверка: 0,7+0,21+0,09=1



Гипергеометрическое распределение

Задача 7. Среди 50 контрольных работ 20 отличных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлеченных 5 работ окажется ровно три отличных.

Решение.

$P(X=3)= (C^3_{20} \cdot C^2_{30})/C^5_{50}$

Задача 8. Имеются 6 билетов в театр, 4 из которых на места первого ряда. Наудачу берут три билета. Составьте таблицу распределения вероятностей числа билетов первого ряда, оказавшихся в выборке. Используя полученную таблицу, найдите $P(X<3)$.

Решение.

x	1	2	3
p	0,2	0,6	0,2

$$P(X=1)= (C^1_4 \cdot C^2_2)/C^3_6 = 0,2$$
$$P(X=2)= (C^2_4 \cdot C^1_2)/C^3_6 = 0,6$$
$$P(X=3)= (C^3_4 \cdot C^0_2)/C^3_6 = 0,2$$

1. В партии 10% нестандартных деталей. Наугад отобраны 4 детали. Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и построить многоугольник распределения.
2. Составьте таблицу распределения вероятностей числа попаданий в мишень при трех независимых выстрелах, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,2.