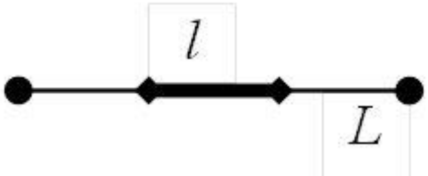
5. Геометрические вероятности. Основные теоремы вычисления вероятностей. Формула полной вероятности.
Формулы Бейеса. Формула Бернулли.

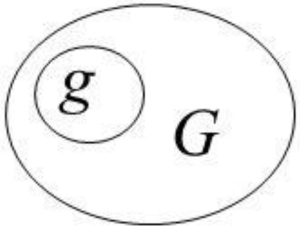
Геометрическое определение вероятности.

Отрезок l – часть отрезка L,
на отрезок L поставлена наудачу точка



$$p = \frac{\text{длина } l}{\text{длина } L}$$

Плоская фигура g – часть фигуры G



$$p = \frac{\text{площадь } g}{\text{площадь } G}$$

Пример. В квадрат со стороной 8 см наудачу брошена точка. Какова вероятность, что эта точка окажется внутри вписанного в квадрат круга?

Основные теоремы вычисления вероятностей.

Теорема. Если А и В – несовместные события, то

$$p(A+B) = p(A) + p(B).$$

Доказательство.

Пусть m_1 – число исходов, благоприятствующих А ,

m_2 – число исходов, благоприятствующих В

$$p(A+B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = p(A) + p(B)$$

Следствие 1. Если $A_1, A_2, \dots, A_n$ – несовместные, то

$$p(A_1+A_2+\dots+A_n) = p(A_1)+p(A_2)+\dots+ p(A_n)$$

Определение. ***Противоположными*** называют два единственно возможных несовместных события.

А – событие, противоположное ему обозначают $\overline{A}$

Примеры.

1. Производится выстрел по цели.

А – попадание, $\overline{A}$ – промах.

2. Брошена монета.

А – выпала решка, $\overline{A}$ – выпал герб.

Следствие 2. $p(A)+p(\overline{A})=p(A+\overline{A})=1.$

Определение. ***Условной вероятностью*** $p_A(B)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Пример.

В коробке 3 белых и 7 чёрных шаров. Из неё дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно.

A – первый шар оказался чёрным

B – второй шар оказался белым

Тогда $p_A(B)$ – вероятность появления вторым белого шара, если первый вытащенный шар – чёрный.

$$p_A(B) = \frac{m}{n}$$

m – число случаев, благоприятствующих наступлению события B при условии, что A уже наступило $\Rightarrow$ благоприятствующих событиям A и B вместе $\Rightarrow$ благоприятствующих событию AB

n – число всех случаев, но при условии, что A наступило $\Rightarrow$ число случаев, благоприятствующих событию A

Обозначим через N – число всех возможных случаев.

$$p_A(B) = \frac{m}{n} = \frac{m/N}{n/N} = \frac{p(AB)}{p(A)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p_A(B) = \frac{p(AB)}{p(A)}}$$

Теорема (умножения вероятностей). Вероятность совместного появления двух событий

$$p(AB) = p(A) \cdot p_A(B)$$

Следствие 1. $p(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots A_n) =$

$$p(A_1) \cdot p_{A_1}(A_2) \cdot p_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot p_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n)$$

Определение. Событие B называют ***независимым от события*** A, если появление события A не изменяет вероятности события B, то есть если

$$p_A(B) = p(B)$$

Утверждение. Если В не зависит от А, то и А не зависит от В, то есть свойство независимости взаимно.

Доказательство.

По теореме умножения вероятностей

$$p(AB) = p(A) \cdot p_A(B) = p(B) \cdot p_B(A)$$

Но В не зависит от А, то есть $p_A(B) = p(B) \Rightarrow$

$$p(A) \cdot p(B) = p(B) \cdot p_B(A) \Rightarrow p_B(A) = p(A) \Rightarrow$$

А не зависит от В

Определение. События А и B называются ***независимыми,*** если появление одного из них не изменяет вероятность появления другого.

Следствие 2. События А и В – независимы тогда и только тогда, когда $p(AB) = p(A) \cdot p(B)$

Доказательство.

1) По теореме умножения вероятностей

$$p(AB) = p(A) \cdot p_A(B)$$

Но A и B – независимы, т.е. $p_A(B) = p(B) \Rightarrow$

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B)$$

2) Пусть $p(AB) = p(A) \cdot p(B)$

Но по теореме умножения вероятностей

$p(AB) = p(A) \cdot p_A(B) \Rightarrow p(A) \cdot p_A(B) = p(A) \cdot p(B) \Rightarrow$

$p_A(B) = p(B) \Rightarrow$ А и В – независимы.

Определение. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются ***независимыми*** (***независимыми в совокупности***), если вероятность каждого из них не зависит от осуществления или неосуществления любого числа остальных событий.

Следствие 3. Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – независимые, то

$$p(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot p(A_3) \cdot \ldots \cdot p(A_n)$$

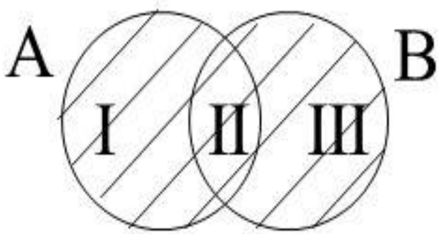
Пусть события А и В – совместные.

Пример. Брошен игральный кубик.

А – выпало четыре очка

В – выпало чётное число очков

А и В – совместные события



$$p(A+B) = p(\mathrm{I}) + p(\mathrm{II}) + p(\mathrm{III}) =$$

$$= \underbrace{p(\mathrm{I}) + p(\mathrm{II})} + \underbrace{p(\mathrm{III}) + p(\mathrm{II})} - \underbrace{p(\mathrm{II})} =$$

$$= p(A) + p(B) - p(AB)$$

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий

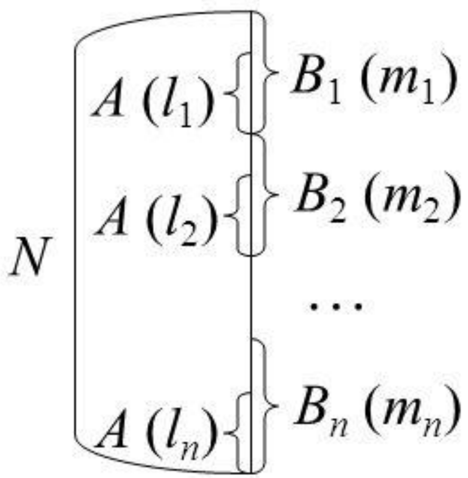
$$p(A+B) = p(A) + p(B) - p(AB)$$

Определение. Несовместные события $B_1, B_2, \ldots, B_n$ образуют ***полную группу***, если в результате испытания обязательно появится одно из этих событий .

$$p(B_1) + p(B_2) + \ldots + p(B_n) = p(B_1 + B_2 + \ldots + B_n) = 1$$

Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_n$ – полная группа несовместных событий.

И пусть событие A может наступить при условии появления одного из событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$.



$$p(A) = \frac{l_1 + l_2 + \ldots + l_n}{N} = \frac{l_1}{N} + \frac{l_2}{N} + \ldots + \frac{l_n}{N} =$$

$$= \frac{m_1}{N} \cdot \frac{l_1}{m_1} + \frac{m_2}{N} \cdot \frac{l_2}{m_2} + \ldots + \frac{m_n}{N} \cdot \frac{l_n}{m_n} =$$

$$= p(B_1) \cdot p_{B_1}(A) + p(B_2) \cdot p_{B_2}(A) + \ldots$$

$$\ldots + p(B_n) \cdot p_{B_n}(A)$$

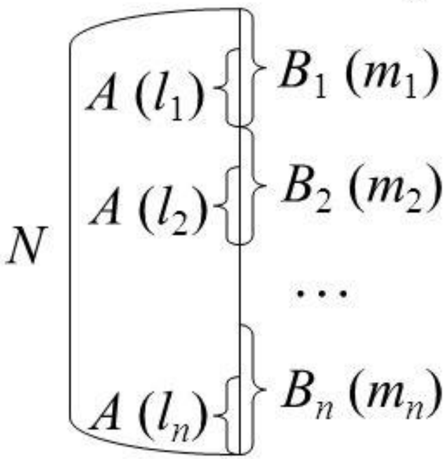
$$\boxed{p(A) = p(B_1) \cdot p_{B_1}(A) + p(B_2) \cdot p_{B_2}(A) + \ldots + p(B_n) \cdot p_{B_n}(A)}$$

– ***формула полной вероятности***

Формулы Бейеса

Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_n$ – полная группа несовместных событий, A – событие, которое может наступить при условии появления одного из событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Найдём вероятность события B_1, при условии, что событие A наступило.



$$\boxed{p_A(B_1)} = \frac{l_1}{l_1 + l_2 + \ldots + l_n} = \frac{\frac{l_1}{N}}{\frac{l_1}{N} + \frac{l_2}{N} + \ldots + \frac{l_n}{N}} =$$

$$= \frac{\frac{m_1}{N} \cdot \frac{l_1}{m_1}}{\frac{m_1}{N} \cdot \frac{l_1}{m_1} + \frac{m_2}{N} \cdot \frac{l_2}{m_2} + \ldots + \frac{m_n}{N} \cdot \frac{l_n}{m_n}} =$$

$$\boxed{= \frac{p(B_1) \cdot p_{B_1}(A)}{p(B_1) \cdot p_{B_1}(A) + p(B_2) \cdot p_{B_2}(A) + \ldots + p(B_n) \cdot p_{B_n}(A)}}$$

Формула Бернулли

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться, либо не появиться.

Пусть в каждом испытании вероятность события A

$$p(A) = p.$$

Найдём вероятность того, что при n испытаниях событие A осуществится ровно k раз.

Обозначим эту вероятность $p_n(k)$.

$p_7(3)$ – вероятность того, что при 7 испытаниях событие A появится ровно 3 раза

Пример.

Имеется 5 ящиков деталей, вероятность брака в каждом из них – 0.1. Какова вероятность, что три детали, наугад выбранные по одной из разных ящиков, окажутся бракованные?

$p_n(k)$ – ?

$$\begin{array}{ccccc} A\begin{cases} p \\ 1-p \end{cases} & A\begin{cases} p \\ 1-p \end{cases} & \dots & A\begin{cases} p \\ 1-p \end{cases} \\ 1 & 2 & & n \end{array}$$

В общем виде аналогично получаем формулу:

$$p_n(k) = p^k \cdot (1-p)^{n-k} \cdot C_n^k$$

Обозначим через $q = 1 - p$. Тогда

$p_n(k) = p^k \cdot q^{n-k} \cdot C_n^k$ – ***формула Бернулли***