

Основные элементы комбинаторики.

Развитие теории вероятностей.

История.

Основные элементы комбинаторики.

1. Размещение $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

Это любое упорядоченное подмножество m из элементов множества n .
(Порядок важен).

2. Перестановки $P_n = n!$

Если $m = n$, то эти размещения называются перестановками.

3. Сочетания $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Это любое подмножество из m – элементов, которые принадлежат множеству, состоящему из n – различных элементов.

(Порядок не важен).

Следствие. Число сочетаний из n элементов по $n - m$ равно числу сочетаний из n элементов по m , т.е.

$$C_n^{n-m} = C_n^m$$

Задача.1.

Сколько можно записать четырехзначных чисел, используя без повторения все 10 цифр?

Решение:

$$1) \quad A_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = 5040.$$

2) Т.к. есть среди чисел 0, который не может стоять впереди, поэтому надо еще найти:

$$A_9^3 = \frac{9!}{6!} = 504$$

$$3) \quad A_{10}^4 - A_9^3 = 5040 - 504 = 4536.$$

Задача.2.

Пусть имеется множество, содержащее 4 буквы: {А,В,С,Д}. Записать все возможные сочетания из указанных букв по три.

Решение:

Здесь в число сочетаний не включены, например АВС, ВСА, т.к. у нас уже есть АВС, потому что порядок элементов в сочетании не учитываются.

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4.$$

Задача.3.

Сколькими способами можно расставить 9 различных книг на полке, чтобы определенные 4 книги стояли рядом?

Решение:

Если обозначить 4 определенные книги как одно целое, то получается 6 книг, которые можно переставлять

$P_6 = 6! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 720$ способами.

4 определенные книги можно переставлять

$P_4 = 4! = 1 * 2 * 3 * 4 = 24$ способами.

Тогда всего перестановок по правилу умножения будет

$$P_6 * P_4 = 720 * 24 = 17280.$$

Задача.4.

Нужно выбрать в подарок 4 из 10 имеющихся книг.
Сколькими способами это можно сделать?

Решение:
$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10!}{4!*6!} = 210.$$

Задача.5.

Имеется 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 7 шаров, чтобы среди них были 3 черных?

Решение: $7_{ш} = 3_ч + 4_б$ Белые шары: $C_{10}^4 = \frac{10!}{4!*6!} = 210$

Черные шары: $C_5^3 = \frac{5!}{3!*2!} = 10$ Тогда $C_{10}^4 * C_5^3 = 210 * 10 = 2100$

Задача.6.

Сколькими способами можно группу из 12 человек разбить на 2 подгруппы, в одной из которых должно быть не более 5, а во второй – не более 9 человек?

Решение:

Первая подгруппа может состоять либо из 3, либо из 4, либо из 5 человек:

$$C_{12}^3$$

$$C_{12}^4$$

$$C_{12}^5$$

$$C_{12}^3 + C_{12}^4 + C_{12}^5 = 1507$$

Задача. 7.

Десять команд участвуют в разыгрывание первенства по футболу, лучшие из которых занимают 1-е, 2-е и 3-е места. Две команды, занявшие последние места не будут участвовать в следующем таком же первенстве. Сколько разных вариантов результата первенства может будут учитывать, если только положение первых трех и последних 2-х команд?

Решение:

1-е три места может будут распределены: $A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 720$ способ
Остается 7 команд, две из которых выбывают из следующего первенства т.к. порядок выбывших команд не учитывается
 $\Rightarrow C_7^2 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$ способом.
Тогда число возможных результатов = $A_{10}^3 * C_7^2 = 15120$

Задача.8.

Сколько существует вариантов опроса 11 учащихся на одном занятии, если ни один из них не будет вызван дважды и на занятии может быть опрошено любое количество учащихся, порядок опроса не важен?

Решение:

1) может не спросить ни одного, т.е. C_{11}^0

2) если только 1, то C_{11}^1 ,

если только 2-х, то C_{11}^2 и т.д.

Тогда он всего опросит $C_{11}^0 + C_{11}^1 + C_{11}^2 + \dots + C_{11}^{11}$

Перестановки с повторениями

Определение 4. Число перестановок n – элементов, в котором n_i элементов i –того типа ($i = \overline{1, k}$) вычисляется по формуле

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Задача: Сколько слов можно составить, переставив буквы в слове «экзамен», в слове «математика»?

Решение: $7! = 5040$

$$\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 151200$$

Размещения с повторениями

Определение 3. k – размещением с повторениями n –элементного множества называется упорядоченный набор длины k элементов данного множества.

Пример. Пусть дано $A = \{a; b; c\}$

2- размещения с повторениями:

$(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b), (a, a), (b, b), (c, c)$

Число k – размещений с повторениями вычисляется по формуле:

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

Сочетания с повторениями

Сочетаниями с повторениями называются такие сочетания, в которых некоторые элементы (или все) могут оказаться одинаковыми.

$$\overline{C}_n^m = C_{m+n-1}^m$$

Пример 8

Сколько наборов из 7 пирожных можно составить, если в продаже имеется 4 сорта пирожных?

$$\overline{C}_4^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$$

- Как и почему возникла теория вероятностей?

Теория вероятностей



Развитие теории вероятностей с момента зарождения этой науки и до настоящего времени было несколько своеобразным. На первом этапе истории этой науки она рассматривалась как занимательный “пустячок”, как собрание курьезных задач, связанных в первую очередь с азартными играми в кости и карты.



Этапы развития.



Д. Кардано

1 Предыстория теории вероятностей.

В этот период, начало которого теряется в веках, ставились и решались элементарные задачи, которые позже будут отнесены к теории вероятностей. Никаких специальных методов в этот период не возникает. Этот период кончается работами Кардано, Пачоли, Тарталья и др. С вероятностными представлениями мы встречаемся еще в античности. У Демокрита, Лукреция Кара и других античных ученых и мыслителей мы находим глубокие предвидения о строении материи с беспорядочным движением мелких частиц (молекул), мы встречаем рассуждения о равновозможных исходах (равновероятных) и т. п.



Н. Тарталья

② Возникновение теории вероятностей как науки.

К середине, XVII в. вероятностные вопросы и проблемы, возникающие в статистической практике, в практике страховых обществ, при обработке результатов наблюдений и в других областях, привлекли внимание ученых, так как они стали актуальными вопросами. В первую очередь это относится к Б. Паскалю, П. Ферма и Х. Гюйгенсу. В этот период вырабатываются первые специфические понятия, такие, как математическое ожидание и вероятность (в форме отношения шансов), устанавливаются и используются первые свойства вероятности: теоремы сложения и умножения вероятностей. В это время теория вероятностей находит свои первые применения в демографии, страховом деле, в оценке ошибок наблюдения, широко используя при этом понятие вероятности.

Основатели теории вероятностей

☀ Основателями теории вероятностей были французские математики Б. Паскаль и П. Ферма, и голландский ученый Х. Гюйгенс



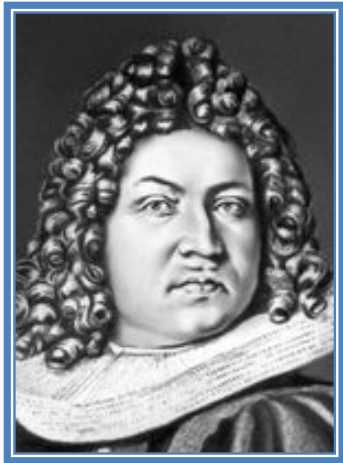
Б. Паскаль



П. Ферма



Х. Гюйгенс



③ Классическое определение вероятности.

Следующий период начинается с появления работы Я. Бернулли "Искусство предположений" (1713), в которой впервые была строго доказана первая предельная теорема — простейший случай закона больших чисел. К этому периоду, который продолжался до середины XIX в., относятся работы Муавра, Лапласа, Гаусса и др. В центре внимания в это время стоят предельные теоремы. Теория вероятностей начинает широко применяться в различных областях естествознания. И хотя в этот период начинают применяться различные понятия вероятности (геометрическая вероятность, статистическая вероятность), господствующее положение занимает, в особенности после работ Лапласа, так называемое классическое определение вероятности.

Якоб
Бернулли



- ④ Следующий период развития теории вероятностей связан прежде всего с Петербургской математической школой. За два столетия развития теории вероятностей главными ее достижениями были предельные теоремы. Но не были выяснены границы их применимости и возможности дальнейшего обобщения. Наряду с огромными успехами, достигнутыми теорией вероятностей в предыдущий период, были выявлены и существенные недостатки в ее обосновании, это в большой мере относится к недостаточно четким представлениям о вероятности.

5 Современный период развития теории

вероятностей начался с установления аксиоматики. Этого прежде всего требовала практика, так как для успешного применения теории вероятностей в физике, биологии и других областях науки, а также в технике и военном деле необходимо было уточнить и привести в стройную систему ее основные понятия. Благодаря аксиоматике теория вероятностей стала абстрактно-дедуктивной математической дисциплиной, тесно связанной с другими математическими дисциплинами. Это обусловило небывалую широту исследований по теории вероятностей и ее применениям, начиная от хозяйственно-прикладных вопросов и кончая самыми тонкими теоретическими вопросами теории информации и теории случайных процессов.

Основатели теории вероятностей



 Строгое логическое обоснование теории вероятностей произошло в XX в. и связано с именами советских математиков С. Н. Бернштейна и А. Н. Колмогорова.



С. Н. Бернштейн



А. Н. Колмогоров