Лекция 1. Множества

Доцент Гончарова И.В.

Множество и его элементы.

Под множеством понимается совокупность объектов одной природы.

Множества мы будем обозначать большими буквами

(A , B , X , Y), его элементы — малыми (a, b, x, y).

Тот факт, что a является элементом множества A , будем обозначать $a \in A$.

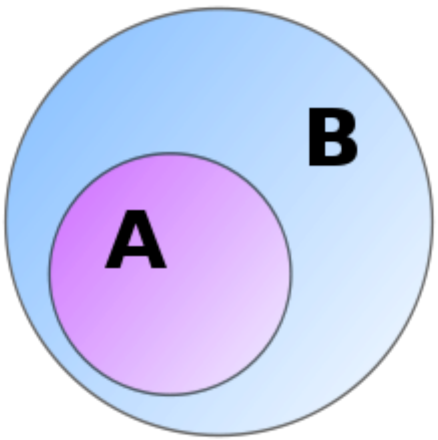
Множество полностью определяется своими элементами. Это означает, что множества совпадают в том и только в том случае, когда они состоят из одних и тех же элементов. Символьная запись определения равенства двух множеств такова: $A = B \Longleftrightarrow$ (для любого $a \in A \Rightarrow a \in B$ и для любого $b \in B \Rightarrow b \in A$).

Множество, не содержащее ни одного элемента, обозначается $\emptyset$ и называется пустым множеством.

Два основных способа задания множеств:

1. **Для конечных множеств, содержащих небольшое количество элементов, просто перечисляют все входящие в него элементы. Так, например, A = {a, b, c} — это множество, элементами которого являются только a, b и c.**
2. **Задание множества с помощью некоторого условия P(a) , которому удовлетворяют все элементы этого множества и только они. Запись A = {a : P(a)} означает, что множество A состоит из всех элементов, которые удовлетворяют условию P(a) (знак “:” означает “такие, что”). Например, N_2 = {n : n $\in$ N и существует некоторое k $\in$ N, что n = 2k} — множество всех четных натуральных чисел.**

Определение. **Множество A содержится во множестве B (обозначается $A \subseteq B$), если каждый элемент множества A является элементом множества B.**



Теорема 1**. $A = B$ тогда и только тогда, когда одновременно $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$ (т.е. $A = B \Leftarrow\Rightarrow A \subseteq B$ и $B \subseteq A$).**

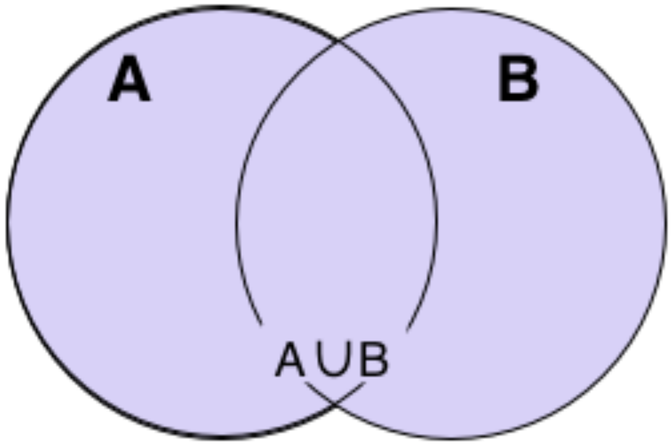
Операции над множествами и их свойства

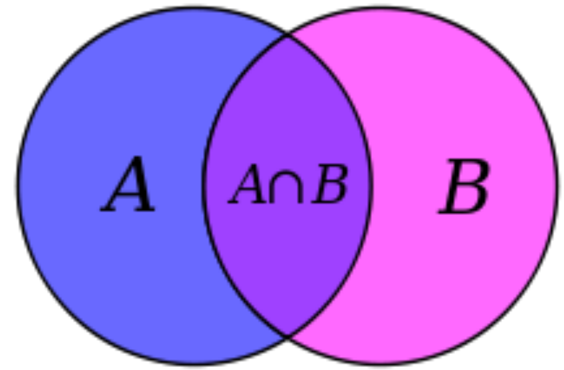
Определение. **Пересечением множеств А и В (обозначается $A \cap B$) называется множество, состоящее из всех элементов, которые одновременно принадлежат и А , и В .**

Символьная запись : $A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Определение. **Объединением множеств А и В (обозначается $A \cup B$) называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих или А , или В .**

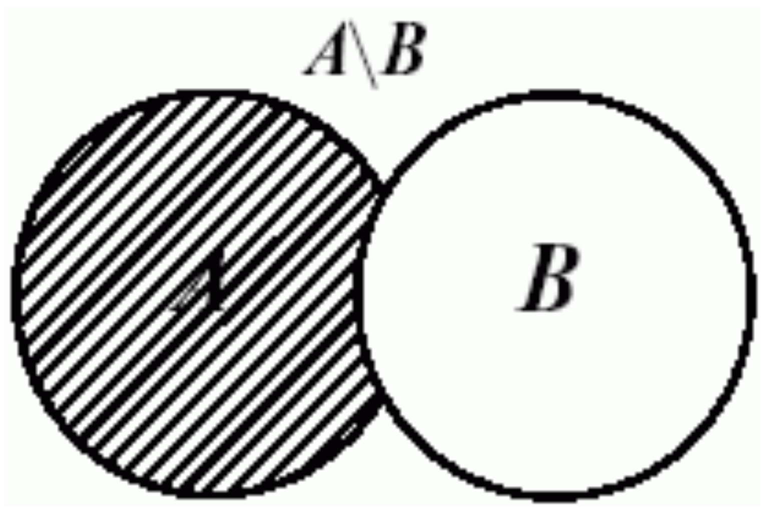
Символьная запись: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$.



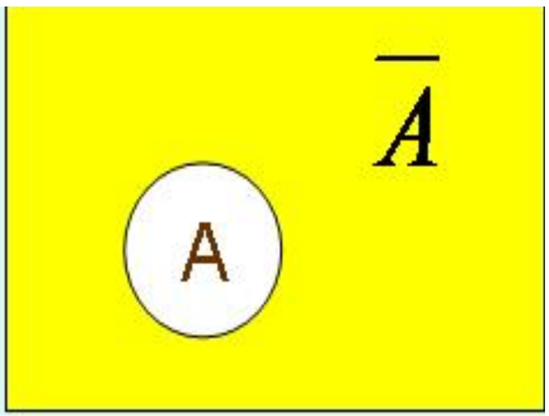


Если A = {1, 2, 3} и B = {3, 4} , то их пересечением будет множество A ∩ B = {3} , а объединением — A ∪ B = {1, 2, 3, 4}

Определение. **Разностью множеств A и B(обозначается A\B) называется множество, состоящее из всех элементов множества A , не принадлежащих множеству B (т.е. $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}$)**



<u>Определение.</u> **Дополнением множества А (обозначение —Ā) называется разность между универсальным множеством I и множеством А (т.е. $\bar{A} = \{x : x \in I$ и $x \notin A\}$)**



Теорема 2. **Пусть A, B и C — произвольные множества. Справедливы следующие равенства:**

1. $A \cup A = A$ $\qquad A \cap A = A$
2. **Коммутативность операций ∪ и ∩**

$A \cup B = B \cup A$ $\qquad A \cap B = B \cap A.$

3. Ассоциативность операций ∪ и ∩

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$

4. Дистрибутивность операций ∪ и ∩

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$

Доказательство 4-го свойства.

Обозначим через X и Y левую и правую части в равенстве 4. Покажем, что оба условия теоремы 1. выполняются.

1. **Докажем сначала, что $X \subseteq Y$. Для этого выберем произвольный элемент $x \in X$. Тогда x одновременно принадлежит $A \cup B$ и C . Из условия $x \in A \cup B$ следует, что $x \in A$ или $x \in B$. Если $x \in A$, то $x \in A \cap C$. Если $x \in B$, то $x \in B \cap C$. Следовательно, в любом случае $x \in A \cap C$ или $x \in B \cap C$. Значит, $x \in Y$.**
2. **Докажем, что выполняется и обратное включение ($Y \subseteq X$). Возьмем произвольный $y \in Y$, тогда $y \in (A \cap C) \cup (B \cap C) \Rightarrow y \in A \cap C$ или $y \in B \cap C$. Если $y \in A \cap C \Rightarrow y \in A$ и $y \in C \Rightarrow y \in A \cup B$ и $y \in C \Rightarrow y \in (A \cup B) \cap C = X$. Если $y \in B \cap C \Rightarrow y \in B$ и $y \in C \Rightarrow y \in A \cup B$ и $y \in C \Rightarrow y \in (A \cup B) \cap C = X$. Итак, $y \in X$. Из теоремы 1. теперь следует, что $X = Y$.**

Остальные свойства операций проверяются аналогично.

__Теорема 3.__ **Пусть A и B произвольные множества. Тогда выполняются следующие свойства:**

5. $A \cup \emptyset = A$ $\qquad$ $A \cap \emptyset = \emptyset$

6. $A \cup I = I$ $\qquad$ $A \cap I = A.$

7. Законы де Моргана

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\qquad$ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

8. $\overline{\overline{A}} = A$

Доказательство.

Свойство 7. Обозначим через X и Y соответственно левую и правую части этого равенства. Покажем, что $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$.

Для любого $x \in X$ выполняется $x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ и $x \notin B \Rightarrow x \in \bar{A}$ и $x \in \bar{B} \Rightarrow x \in Y$. Следовательно, $X \subseteq Y$. Для любого $y \in Y$ выполняется $y \in \bar{A}$ и $y \in \bar{B} \Rightarrow y \notin A$ и $y \notin B \Rightarrow y \notin A \cup B \Rightarrow y \in X$. Следовательно, $Y \subseteq X$.

Декартово произведение множеств. Соответствия

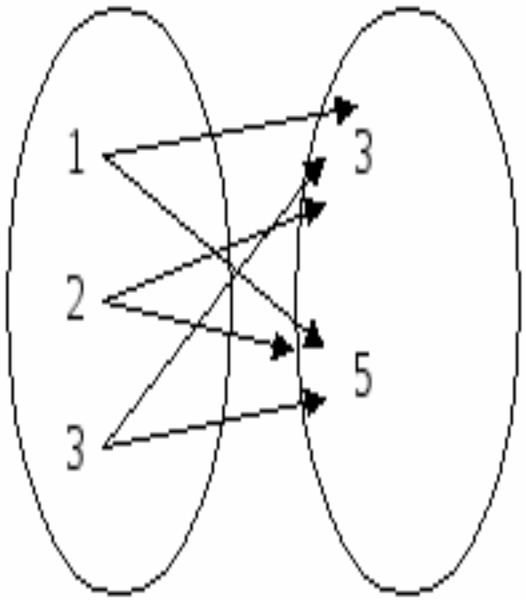
В 1637 году вышел философский трактат "Рассуждение о методе" французского философа и математика Рене Декарта (1596—1650). Последняя часть этой работы была посвящена новому геометрическому методу — методу координат. Каждой точке плоскости Декарт поставил в соответствие упорядоченную пару вещественных чисел — ее первую и вторую координаты.

Рассмотренное Декартом множество всех упорядоченных пар вещественных чисел является примером произведения множества на себя. Для определения произведения множеств в общем случае необходимо понятие упорядоченной пары.

Множества {a, b} и {b, a} равны между собой и поэтому не дают возможности определить, какой из двух элементов пары является первым, а какой — вторым. Последнее важно, так как, например, точки с координатами (1, 2) и (2, 1) различны, в то время как множества {1, 2} и {2, 1} совпадают.

<u>Определение.</u> **Пусть $a \in A$, $b \in B$. Упорядоченной парой (a, b) называется множество $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, при этом a называется первым элементом упорядоченной пары, а b — вторым.**

<u>Определение.</u> **Произведением двух множеств A и B называют множество $A \times B$, состоящее из всех упорядоченных пар, первые элементы которых выбираются из A, вторые — из B (т.е. $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$)**



$A \times B$	3	5
1	(1; 3)	(1; 5)
2	(2; 3)	(2; 5)
3	(3; 3)	(3; 5)

Теорема 4. **Пусть A, B и C — произвольные множества, тогда выполняются следующие свойства:**

1. **$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,**
2. **$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.**

Доказательство. Обозначим через X и Y левую и правую части равенства 1. Если $x \in X \Rightarrow x = (d, c)$, где $d \in A \cup B$, $c \in C$. Если $d \in A \Rightarrow x \in A \times C$. Аналогично, если $d \in B \Rightarrow x \in B \times C$. Следовательно, $X \subseteq Y$. Так как $A \times C$ и $B \times C$ содержатся в X , то $Y \subseteq X$. По теореме 1 множества X и Y совпадают.

Свойство 2 доказывается аналогично.

Определение. **Соответствием φ между множествами А и В называется произвольное подмножество их произведения $A \times B$ (т.е. $\varphi \subseteq A \times B$).**

Итак, соответствие состоит из упорядоченных пар. Каждая пара $(a, b) \in \varphi$ указывает, что элементу $a \in A$ соответствует элемент $b \in B$ при данном соответствии φ .

Пример:

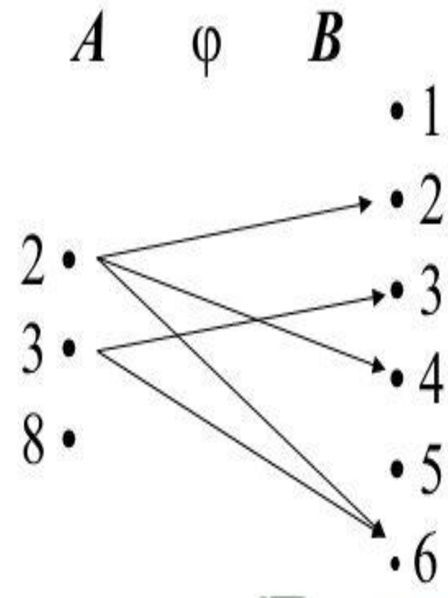
Пусть даны множества A и B

A = { 2, 3, 8 }

B = { 1, 2, 3, 4, 5, 6,

Соответствием между множествами *A* и *B* «число из A есть делитель числа из B» представляется множеством

$\varphi = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6)\}$,



<u>Определение.</u> **Областью определения соответствия φ называется множество Dom φ = {a ∈ A : существует элемент b ∈ B , что (a, b) ∈ φ} (т.е. это все элементы из A , которым соответствует хотя бы один элемент из B).**

<u>Определение.</u> **Множеством значений соответствия φ называют множество Im φ = {b ∈ B : существует элемент a ∈ A, что (a, b) ∈ φ} (т.е. это все элементы из B , которые соответствуют хотя бы одному элементу из A).**

Для соответствия φ в примере Dom φ = {2,3} и Im φ = {2,3,4,6} . Для обозначения соответствия φ между множествами A и B будем использовать φ : A → B

Определение. **Соответствие φ называется**

1) **всюду определенным, если Dom φ = A ;**
2) **сюръективным, если Im φ = B ;**
3) **однозначным, если каждому a ∈ Dom φ соответствует единственный элемент b из B , т.е. из $(a, b) \in \varphi$ и $(a, b_1) \in \varphi \Rightarrow b = b_1$;**
4) **инъективным, если разным элементам из Dom φ соответствуют разные элементы из B , т.е. из $(a, b) \in \varphi$ и $(a_1, b) \in \varphi \Rightarrow a = a_1$.**

<u>П р и м е р 2.</u> **Рассмотрим множества А =** $\{1,2,3,4\}$ и $B = \{a,b,c\}$ Соответствие **φ : А → В такое: φ = {(1, b), (3, a), (3, c), (4, b)}. Тогда соответствие φ сюръективно, но не всюду определено (2 ∉ Dom φ), не однозначно (так как (3, a),(3, c) ∈ φ), не инъективно (так как (1, b),(4, b) ∈ φ).**

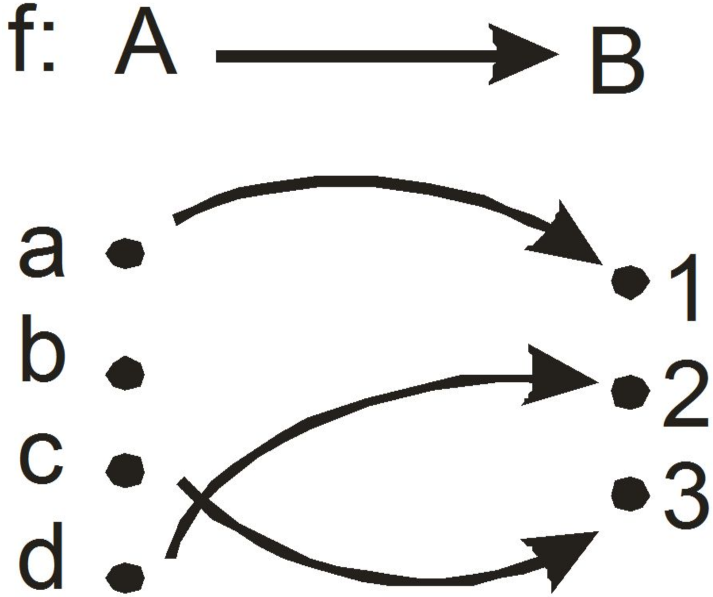
Определение. **Отображением называется всюду определенное и однозначное соответствие (выполняются свойства 1 и 3). Функцией называют отображение в вещественную прямую (т.е. B = R).**

Определение. **Биекцией называют всюду определенное, сюръективное, однозначное и инъективное соответствие (выполняются все свойства 1—4).**

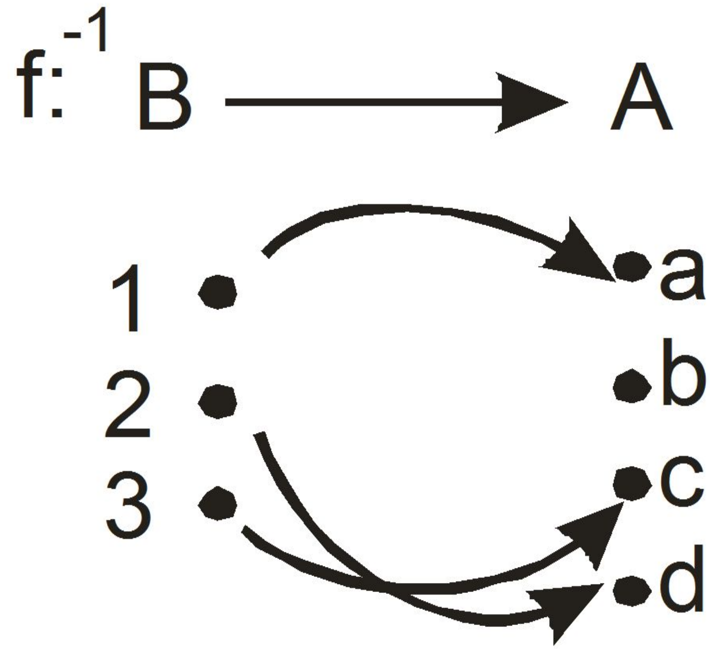
Например, квадратичная функция каждому числу $x \in R$ (поэтому она всюду определена) ставит в соответствие одно число $ax^2 + bx + c$ (она однозначна). Но квадратичная функция не является инъективным соответствием (некоторым различным числам она ставит в соответствие одно и то же число). Поэтому это не биекция. С другой стороны, функция $f(x) = kx + b$ является биекцией при $k \neq 0$.

<u>Определение.</u> **Обратным соответствием к соответствию $\varphi : A \rightarrow B$ называют $\varphi^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in \varphi\}$.**

<u>Определение.</u> **Композицией соответствий $\varphi : A \rightarrow B$ и $\psi: B \rightarrow C$ называют соответствие $\chi :\rightarrow A \times C$ такое, что $\chi = \{(a, c)$: существует элемент $b \in B$, что $(a, b) \in \varphi$ и $(b, c) \in \psi\}$ (обозначается композиция так: $\chi = \psi \circ \varphi$).**



f: A B
a
b
c
d
1
2
3



f:-1 B A
1
2
3
a
b
c
d

Пример: пусть даны множества

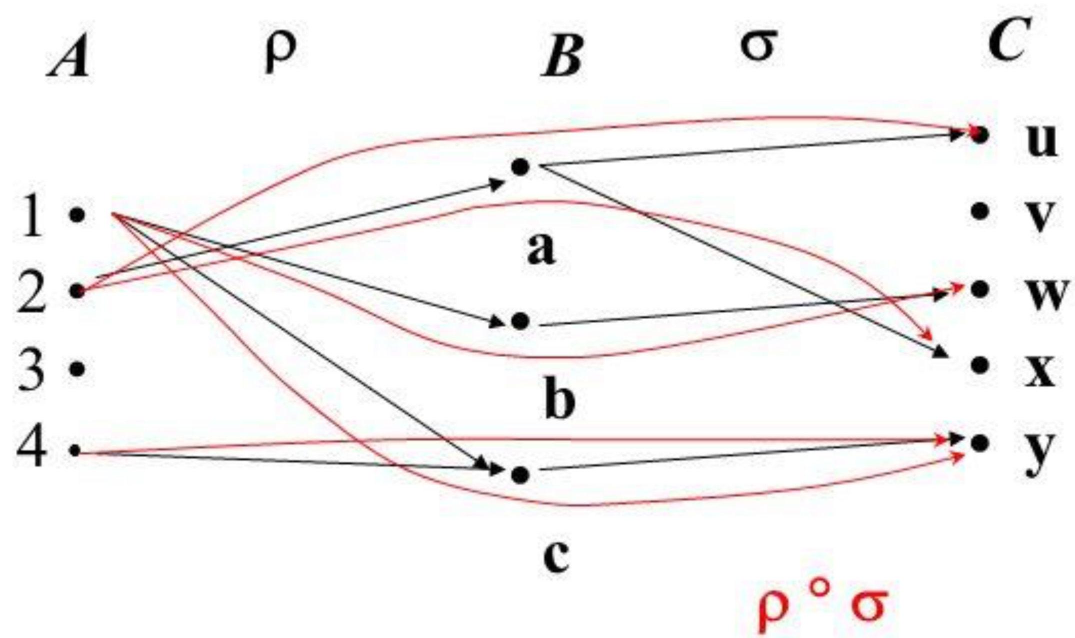
$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$, $B = \{ a, b, c \}$, $C = \{ u, v, w, x, y \}$,
а также соответствия $\rho \subset A \times B$ и $\sigma \subset B \times C$

$\rho = \{ (1, b), (1, c), (2, a), (4, c) \}$,

$\sigma = \{ (a, u), (a, x), (b, w), (c, y) \}$,

тогда композиция соответствий ρ и σ:

$\rho \circ \sigma = \{ (1, w), (1, y), (2, u), (2, x), (4, y) \}$



Когда речь идет о биекции между множествами B и A , часто используют математический синоним: взаимно однозначное отображение B на A . Если число элементов во множестве B меньше (не больше), чем в A , тогда B взаимно однозначно можно отобразить только на подмножество из A (сохраняя свойство инъективности, мы не требуем, чтобы отображение было сюръективным). В этом случае мы будем использовать термин — “взаимно однозначное отображение B в A ”.

П р и м е р. Пусть $B = \{1, 2\}$ и $A = \{a, b, c\}$. Тогда $f_1 = \{(1, a), (2, b)\}$, $f_2 = \{(1, b), (2, c)\}$, $f_3 = \{(1, b), (2, a)\}$, $f_4 = \{(1, c), (2, b)\}$ и $f_5 = \{(1, a), (2, c)\}$ $f_6 = \{(1, c), (2, a)\}$ — примеры всех взаимно однозначных отображений B в A .

Конечные множества.

Для сравнения множеств можно определить число элементов в А , затем в В и сравнить получившиеся два целых числа. Если число элементов определить невозможно, то задача решается с помощью биекции. Следует выбирать по элементу из каждого множества, образуя пары (пары соответствия), до тех пор, пока не закончатся элементы хотя бы в одном из этих двух множеств. Если это произойдет одновременно, то получится биекция между этими множествами, и, следовательно, во множествах А и В одинаковое количество элементов.

Определение. **Множества A и B называются равномощными ($A \sim B$), если существует биекция между ними.**

Теорема 5**. Пусть A, B и C — некоторые множества. Тогда выполняются свойства:**

1. **рефлексивность : $A \sim A$.**
2. **симметричность: $A \sim B \Rightarrow B \sim A$.**
3. **транзитивность: $A \sim B$ и $B \sim C \Rightarrow A \sim C$.**

Определение. **Пусть $n \in N$, тогда множество $N_{\leq n} = \{1, 2, \ldots, n\}$ называют начальным отрезком натурального ряда.**

Определение. **Множество A называется конечным множеством, если $A = \emptyset$ или существует $n \in N$, что $A \sim N_{\leq n}$. При этом будем говорить, что мощность множества A равна n ($|A| = n$). Если множество пусто, то по определению считаем, что его мощность равна нулю.**

Например, если Арус — множество всех букв русского алфавита, то |Арус| = 33 .

Бесконечные множества

Определение. Счетным множеством называется произвольное множество А , равномощное множеству N.

П р и м е р. Множество всех четных натуральных чисел (N_2) счетно. Биекцию можно задать, например, так: $\varphi(n) = 2n$, $n \in N$.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots & N \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow & \ldots & \\
2 & 4 & 6 & \ldots & 2n & \ldots & N_2
\end{array}
$$

Теорема 6. **Множество С всех бесконечных последовательностей из 0 и 1 несчетно.**

Доказательство**: (Канторова диагональ). Допустим противное: существует пересчет натуральными числами всех бесконечных последовательностей A1,A2,… из 0 и 1:**

A1: a_{11}, a_{12}, a_{13}
A2: a_{21}, a_{22}, a_{23}
A3: …..

Построим множество B: b_1, b_2, b_3, где
b_i=1, если a_{ii}=0;
b_i=0, если a_{ii}=1;

Последовательность B в указанный пересчет не входит, ибо множество B отличается от каждого A_i элементом.

Следовательно, множество всех бесконечных последовательностей из 0 и 1 несчетно.

***Определение*: Множество А имеет континуальную мощность, если А эквивалентно множеству всех бесконечных последовательностей из 0 и 1.**

***Замечание:* Мощность всех бесконечных последовательностей из 0 и 1 есть эталон континуальной мощности.**

***Замечание*:**

1) Множество P (N) всех подмножеств натуральных чисел имеет мощность континуума.

2) Мощность множества всех вещественных чисел континуальна.

3) Мощность множества всех комплексных чисел континуальна.

4) Мощность множеств [0,1], (0,1], [0,1), (0,1) континуальны.

Отношения порядка и отношения эквивалентности.

Определение. Отношением ρ на множестве A называют произвольное подмножество декартового квадрата $A \times A$ (т.е. $\rho \subseteq A \times A$). Если $(x, y) \in \rho$, будем использовать обозначение $x \rho y$ (x и y находятся между собой в отношении ρ).

Типы отношений:

1) **ρ рефлексивно, если a ρ a для любых a ∈ A,**
2) **ρ симметрично, если a ρ b ⇒ b ρ a ,**
3) **ρ антисимметрично, если**

   a ρ b и b ρ a ⇒ a = b ,

1) **ρ транзитивно, если a ρ b и b ρ c ⇒ a ρ c ,**
2) **ρ — отношение порядка, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Отношение порядка будем обозначать с помощью $\leq$ или $<$. Часто к свойствам порядка добавляется еще одно — любые два элемента a, b ∈ A можно сравнить между собой.**
3) **ρ — отношение эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.**

***П р и м е р отношения эквивалентности*. ρ $\subseteq$ P × P , где P — множество всех людей. Отношение ρ зададим так: a ρ b ⇔ когда дни рождения a и b совпадают.**

***П р и м е р отношения порядка.* ρ $\subseteq$ N × N . Пусть n ρ m ⇔ когда n делит m . Это отношение делимости на множестве N .**