**11 класс, подготовка к олимпиадам МГУ по физике**

**Теоретический обзор к занятию 6.**

**Темы: динамика криволинейного движения, закон сохранения энергии, движение жидкости.**

Как уже обсуждалось ранее (см. теорию к занятию 1), описание произвольного криволинейного движения может быть построено на основании представления его в виде комбинации прямолинейного равноускоренного и равномерного движения по окружности. В этом случае удобно использовать «естественное» разложение скорости и ускорения тела по базису из единичных векторов, направленных по касательной и по нормали к траектории:

$$\vec{v} = v \cdot \vec{e}_{кас}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{кас} + \vec{a}_{цс} = v_t' \cdot \vec{e}_{кас} + \frac{v^2}{R} \cdot \vec{e}_{цс}$$

(где $R$ – *радиус кривизны* траектории, являющийся ее геометрической характеристикой – см. материалы к занятию1). Таким образом, вектор мгновенной скорости всегда направлен по касательной к траектории, а вектор ускорения есть сумма касательной (тангенциальной) и центростремительной (нормальной) компонент. Поэтому при решении задач динамики криволинейного движения действующие на тело силы также удобно разложить по естественному базису. В частности, если результирующая сила, действующая на тело в рассматриваемой задаче, перпендикулярна скорости, то у такого тела есть только центростремительная компонента ускорения, и модуль скорости тела не меняется (скорость изменяется только по направлению). Если и величина этой силы не будет меняться, то, как видно из формулы для центростремительного ускорения, будет оставаться неизменным и радиус кривизны траектории, то есть – в случае плоского движения – тело будет совершать равномерное вращение по окружности. Для анализа движения в подобных случаях обычно достаточно исходить из одного уравнения движения для центростремительной компоненты ускорения:

$$m\frac{v^2}{R} = F_n .$$

В более сложных случаях одного этого уравнения может оказаться недостаточно, и тогда можно воспользоваться законами сохранения, следующими из уравнений движения. Наиболее часто используется закон сохранения энергии. Разберем его содержание.

Движущееся тело обладает *кинетической энергией* $E_K = \frac{mv^2}{2}$. Эта энергия изменяется за счет работы сил, действующих на тело. Силы могут быть разделены на *потенциальные* (или *консервативные*) и *диссипативные* в зависимости от того, как они меняют кинетическую энергию тела – возвратным или безвозвратным образом. Например, при движении тела вверх в поле тяжести оно теряет кинетическую энергию за счет работы силы тяжести вплоть до полной остановки, но затем оно движется вниз, и при этом его кинетическая энергия уже возрастает – вновь за счет работы силы тяжести, т. е. сила тяжести «возвращает» отнятую энергию. Поэтому сила тяжести – потенциальная (консервативная). Можно рассматривать этот процесс как переход механической энергии из одной формы в другую – из кинетической в *потенциальную* и обратно. Напротив, сила трения, забрав у тела его кинетическую энергию, не будет разгонять его после остановки – здесь энергия тела переходит в <u>немеханическую</u> форму (в тепло). Отметим, что «возвратность» забираемой силой энергии можно установить по следующему признаку (*признак потенциальности*): если перемещать тело по замкнутой траектории, то работа потенциальной силы должна равняться нулю. Следствием этого свойства является то, что работа потенциальной силы при переносе тела из точки 1 в точку 2 не зависит от пути переноса и ее можно представить как разность значений некоторой функции координат – потенциальной энергии (то есть потенциальную энергию можно определить как величину, равную работе по перемещению тела из точки с данными координатами в некоторую «нулевую» точку). Видно, что потенциальная энергия определена с точностью до постоянного слагаемого (есть произвол в выборе «нулевой» точки).

В результате, если ввести понятие полной механической энергии как суммы кинетической и потенциальной энергий всех входящих в рассматриваемую систему тел, то можно сформулировать закон сохранения::

***Если в механической системе отсутствуют диссипативные силы, то полная механическая энергия сохраняется в процессе движения:*** $(E_K + U)_{t=t_1} = (E_к + U)_{t=t_2}$ **.**

Сила и потенциальная энергия связаны между собой: например, для одномерного случая $F_x \cdot \Delta x = U(x) - U(x+\Delta x) \Rightarrow F_x = -\left.\frac{\Delta U}{\Delta x}\right|_{\Delta x \to 0} = -U'$ (то есть сила равна производной от потенциальной энергии со знаком минус!).

Приведем наиболее часто используемые в задачах по материалам школьного курса физики выражения для потенциальной энергии:

- потенциальная энергия тела на высоте $h$ в однородном поле тяжести (энергия взаимодействия с массивным близко расположенным телом ): $U = mgh$.

- потенциальная энергия деформированной пружины (величина деформации – $x$): $U = \frac{k\,x^2}{2}$.

- потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух тел на расстоянии $r_{12}$: $U = -G\,\frac{m_1\,m_2}{r_{12}}$.

- потенциальная энергия электростатического взаимодействия заряженных тел на расстоянии $r_{12}$: $U = k\,\frac{q_1\,q_2}{r_{12}}$, $\quad k \equiv \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}$.

Отметим одно важное для данного занятия обстоятельство: поскольку изменение кинетической энергии тела связано с изменением скорости, то есть с ускорением, то закон сохранения (или изменения) энергии можно использовать <u>вместо</u> второго закона Ньютона. Особенно часто это используется в задачах на определение ускорения сложных систем, в которых непосредственная запись уравнений движения может быть нетривиальной или даже выходить за рамки школьной программы. Схема такого подхода состоит в следующем:

I/ С помощью уравнений кинематической связи или иных соотношений выражаем кинетическую энергию рассматриваемой системы через скорость интересующего нас тела. Обычно зависимость кинетической энергии от скорости носит квадратичный характер:

$$E_{кин} = \alpha \cdot \vec{v}^{\,2}$$

II/ Вычисляем изменение кинетической энергии при малом изменении состояния движения системы:

$$\Delta E_{кин} = 2\alpha\,\vec{v}\,\Delta\vec{v} = 2\alpha[v_x\,\Delta v_x + v_y\,\Delta v_y + v_z\,\Delta v]$$

III/ Находим изменение потенциальной энергии системы при малом перемещении тела. Поскольку потенциальная энергия есть функция координат тела, то ее изменение зависит от приращений координат: Например, если потенциальная энергия есть функция только одной декартовой координаты, то

$$U = U(x) \quad \Rightarrow \quad \Delta U = U'_x \cdot \Delta x$$

IV/ Если в системе есть потери механической энергии, то величину потерь за малое время $\Delta t$ также надо выразить либо через $\Delta t$, либо через изменение координат или скорости тела, т.е. (для самого общего *одномерного* случая).

$$\Delta Q = q\,\Delta t + \gamma\,\Delta x + \eta\,\Delta v_x$$

V/ Записать закон сохранения энергии для малого перемещения

$$\Delta E_{кин} = -\Delta U - \Delta Q,$$

разделить его на $\Delta t$ и получить уравнение для определения ускорения.

Аналогичным образом можно находить скорость «установившегося» движения тел (т.е. движения с нулевым ускорением). В этом случае кинетическая энергия тела не изменяется, и убыль потенциальной энергии должна соответствовать потерям механической энергии.

Кроме того, этот закон можно использовать как для связи скоростей тела в разных точках его криволинейной траектории. Например, для изучения движения по круговой орбите в поле тяготения могут быть полезны соотношения, связывающие полную энергию тела с радиусом орбиты или скоростью:

$$E = E_K + U = \frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{R} = -\frac{GmM}{2R} = -\frac{mv^2}{2}.$$

Эти соотношения позволяют просто оценить минимальную работу, которую надо совершить для перевода тела с одной круговой орбиты на другую. Кроме того, из них очевидно, что при уменьшении механической энергии тела (например, при действии слабых диссипативных сил) радиус орбиты тела должен уменьшаться, а величина скорости – увеличиваться.

Наконец, в наиболее сложных случаях, когда существует отличная от нуля касательная составляющая результирующей силы (соответственно, скорость тела будет изменяться по величине), обычно наиболее удобный путь анализа движения – это <u>совместное</u> использование уравнения движения для центростремительной компоненты ускорения и закона сохранения (изменения) полной механической энергии. Удобство это связано с тем, что в оба этих соотношения входит величина $v^2$, и возникающую систему можно решать <u>алгебраически.</u>

Одно из интересных следствий закона сохранения энергии – уравнение Бернулли, описывающее движение жидкости. В этом случае в энергию системы надо включить энергию объемных напряжений в жидкости, плотность которых определяет давление жидкости $p$. Поэтому для всех малых объемов в одной «трубке тока» в идеальной жидкости плотностью $\rho$, движущейся в поле тяжести, выполняется требование $p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = const$.

Часто это уравнение при использовании совместно с условием неизменности объема жидкости или следующим из него уравнением непрерывности потока жидкости $v \cdot S = const$ (произведение скорости потока жидкости в некотором сечении на величину поперечного сечения потока неизменно) позволяет найти многие характеристики потока.