

Подготовка к олимпиадам МГУ по физике

Теоретический обзор к занятию 5.

Темы: динамика прямолинейного движения, кинематические связи, динамика движения по окружности.

Динамика – основной раздел механики, связывающий взаимодействия тел и изменение их состояний движения. С этим разделом связаны основные понятия и основные законы механики.

Основные понятия:

- **Инерция** – способность тел сохранять состояние своего движения неизменным.
- **Масса** – мера инертности тела; величина, характеризующая способность тела сохранять состояние своего движения.
- **Взаимодействие** – способность тел, благодаря которой их

Основные законы (законы Ньютона):

1. *Существуют такие системы отсчета (называемые **инерциальными**), в которых тело покоится или движется равномерно и прямолинейно, если сумма приложенных к телу сил равна нулю.*
2. *Ускорение, вызываемое силой, прямо пропорционально этой силе и обратно пропорционально массе тела:*

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

3. *При непосредственном взаимодействии два тела действуют друг на друга с силами, равными по величине и противоположными по направлению:*

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Физическое содержание законов Ньютона:

Первый закон: Основная его часть – утверждение о существовании особого класса систем отсчета – инерциальных. Эти системы отсчета важны для физики потому, что именно в них остальные законы (например, второй закон) могут применяться без какой-либо корректировки. Обратите внимание: первый закон **не утверждает**, что «тело покоится или движется равномерно-прямолинейно, когда сумма действующих на него сил равна 0». В этой фразе в действительности содержится рецепт «узнавания» инерциальных систем отсчета: если в некоторой системе отсчета ускорение тела, на которое не действуют «нескомпенсированные» силы, равно 0, то эта система отсчета – инерциальная. Более того, все реально используемые системы отсчета строго говоря не являются инерциальными – Земля вращается вокруг своей оси и вокруг Солнца, Солнце – вокруг центра Галактики и т. д. Однако в любом реальном исследовании измерения проводятся не с абсолютной точностью – всегда есть некоторая допустимая погрешность. Замечательно, что и с этой точки зрения первый закон дает критерий выбора: если ускорение тела и сумма приложенных к нему сил равны нулю с требуемой в нашем исследовании («в условиях данной задачи») точностью, то и система отсчета, относительно которой замерялось ускорение, инерциальна с той же точностью.

Второй закон: Нетрудно заметить, что именно включение второго закона Ньютона в систему аксиом механики превращает понятие о силе и массе как количественных характеристиках взаимодействия и инертности тел в определение этих величин. В самом деле, в физике определение любой «наблюдаемой» производится путем указания способа ее измерения: например, длина любого отрезка определяется путем сравнения его с эталоном длины, длительность интервала времени – путем сравнения с эталонным интервалом и так далее. Аналогично и измерение массы тела производится путем сравнения массы тела с эталоном массы. Сравнение масс тел осуществляется путем помещения их в условия, в которых их взаимодействие с окружающими телами можно считать (с требуемой точностью) одинаковым, и тогда отношение их ускорений обратно пропорционально отношению масс.

Примером такого (прямого) сравнения является измерение отношения масс связанных тел, помещенных на гладкий горизонтальный вращающийся стержень. Принятие дополнительных законов, формулы которых содержат массы (например, закона всемирного тяготения) позволяет ввести и другие (косвенные) способы сравнения масс (например, *взвешивание*).

Важно также понимать, что второй закон не только устанавливает связь между ускорением, силой и массой, но и указывает на силу (т.е. на взаимодействие тел) как на причину изменения состояния движения тела. Следующее из второго закона соотношение $\vec{F} = m\vec{a}$ обычно называют *уравнением движения* тела. Оно служит основанием для экспериментального определения силы по ускорению, приобретаемому телом с заданной массой под действием этой силы.

Третий закон: Как и в случае с 1 и 2 законами, значение третьего не следует сводить к содержащейся в нем формуле. Он является частью «механической картины мира», создаваемой на основе законов Ньютона. Например, фраза «два тела действуют друг на друга» содержит утверждение о *парном* характере взаимодействия. Не может быть силы, действующей на выбранное тело и не имеющей «источника» - другого тела, на которое должна действовать «парная» сила. Заметим, что каждую пару составляют силы одной природы, приложенные к разным телам. В предложенной формулировке термин «непосредственное» означает взаимодействие тел при соприкосновении в некоторой точке пространства. Тем самым оно отличается от опосредованного взаимодействия, в котором действие одного тела на другое передается материальной средой (жидкостью, упругим телом, полем). Например, если два тела движутся в жидкости, каждое из них возбуждает волны плотности, которые воздействуют на другое тело. Однако из-за конечности скорости распространения волн на второе тело будет производить действие волна, испущенная первым в более ранний момент времени, когда оно находилось не в том месте, где находится в момент действия. Ясно, что в этом случае третий закон для взаимодействия тел не выполняется. Тем не менее следует отметить, что он выполняется в каждом из непосредственных взаимодействий, составляющих опосредованное (во взаимодействии тел с соседними частицами жидкости и частиц жидкости между собой).

Во многих задачах динамики движение одного или нескольких тел подчинено некоторым ограничениям – например, тела могут двигаться по направляющим, или могут быть соединены нитью. Такие ограничения называют *кинематическими связями*. Их математическая запись позволяет получить соотношения между координатами, скоростями и ускорениями тел – *уравнения кинематической связи*. Ясно, что обычно существует реальная физическая причина, приводящая к возникновению связи. Как правило, выполнение ограничений, накладываемых связями, обеспечивается действием *сил реакции* – сил натяжения нитей, сил нормальной реакции твердых тел и сил трения. Поэтому при решении задач, в которых возникают уравнения кинематической связи, важно обращать внимание на два обстоятельства. Во-первых, количество независимых уравнений связи должно быть равно количеству сил реакции, действующих в системе. Дело в том, что силы реакции не имеют заданных значений – они принимают как раз те значения, которые обеспечивают движения со связями. Поэтому они являются неизвестными величинами наряду с ускорениями тел вдоль координатных осей. Количество же независимых *уравнений движения*, следующих из второго закона Ньютона, очевидно равно числу этих ускорений. Поэтому для получения полной системы уравнений к уравнениям движения необходимо добавить по уравнению связи на каждую силу реакции. Во-вторых, для многих сил реакции существуют «пределы возможностей», при выходе за которые сила реакции уже не может обеспечить выполнение ограничений связи, и связь «разрушается» - нити провисают, тела начинают деформироваться или проскальзывать и так далее.

Перечислим наиболее часто встречающиеся в задачах виды связей с указанием пределов их существования.

Жесткий стержень.

Если тела соединены жестким стержнем, то расстояние между ними остается неизменным, а проекции скоростей и ускорений на направление стержня совпадают. Если рассматривается

вращательное движение, то совпадают угловые скорости и угловые ускорения тел. Сила реакции, обеспечивающая связь – *сила упругости* стержня. Абсолютно жесткий стержень выдерживает любую внешнюю нагрузку, не деформируясь. Реальные стержни имеют предельные значения нагрузки, выше которых они начинают деформироваться. Если такой предел в задаче задан, то условие существования связи $|\vec{F}_{упр}| \leq F_{max}$.

Нерастяжимая нить.

В данном случае, пока нить натянута, она создает ограничения, во многом схожие с предыдущим случаем: расстояние между связанными телами остается неизменным, а проекции скоростей и ускорений на направление нити совпадают. Отличия же состоят в следующем: во-первых, нить может свободно изгибаться (вокруг блока, балки и т.д.), оставаясь натянутой; во-вторых, нить не может «сжиматься» - при уменьшении расстояния между телами она провисает. Сила реакции – *сила натяжения нити*, и условием существования связи является выполнение требования $0 \leq T \leq T_{max}$. При $T = 0$ нить провисает, а при $T = T_{max}$ - рвется.

Соприкосновение жестких поверхностей тел.

В этом случае, пока деформациями поверхностей можно пренебрегать, и пока тела не отрываются друг от друга, их смещения в направлении, перпендикулярном поверхности соприкосновения, должны быть равны. Поэтому равны и проекции скоростей и ускорений тел на соответствующую ось. Обеспечивает выполнение уравнений связи *сила нормальной реакции*, которая должна удовлетворять требованию $0 \leq N \leq N_{max}$. При $N = 0$ происходит отрыв тел друг от друга, а при $N = N_{max}$ - поверхности начинают существенно деформироваться.

Отсутствие проскальзывания соприкасающихся тел.

Этот вид связи может возникать как дополнение к предыдущему, если между соприкасающимися телами существует *сила трения*, способная обеспечить отсутствие проскальзывания. Тогда тела вообще не изменяют своего относительного положения – их скорости и ускорения совпадают. Условие существования связи: $|\vec{F}_{тр}| \leq F_{тр}^{max} = \mu N$.

Связи, появляющиеся из-за «особых совпадений».

Это связи, существование которых обеспечено не силами реакции, а «особым» подбором параметров системы. Приведем простой пример. Пусть на наклонную поверхность на небольшом расстоянии поставлены два тела, коэффициенты трения которых одинаковы и малы: $\mu_1 = \mu_2 < \operatorname{tg} \alpha$. Они будут двигаться с одинаковым ускорением, и поэтому скорости их будут всегда равны, а расстояние между ними – постоянно. Эти соотношения выглядят как уравнения связи, но на самом деле они есть следствие уравнений движения и соотношения $\mu_1 = \mu_2$. Поскольку в этом случае никакой силы реакции, обеспечивающей действие связей, нет, то при добавлении соответствующих уравнений связи к уравнениям движения число уравнений становится больше числа неизвестных (ускорений и сил реакции). «Лишние» уравнения в этом случае как раз и есть соотношения между параметрами задачи, создающие «иллюзию связи».

Наконец, рассмотрим способы получения уравнений связи. Обычно используется два подхода.

1. Иногда оказывается не слишком сложно записать ограничение связи непосредственно через координаты тел. Например, если несколько тел связаны нерастяжимой нитью (обычно с помощью системы блоков), и длины всех участков нити можно записать через координаты тел, то можно просто записать условие постоянства длины нити при перемещениях: $\sum \Delta l = \text{const}$. Это и будет уравнение связи для координат. Поскольку это соотношение выполняется для любого момента времени, то от него можно перейти к соотношению для приращений координат и из него – для скоростей (т.е. по существу речь идет о том, что такое соотношение можно *продифференцировать*). Затем аналогично можно перейти к уравнению связи для ускорений. Поскольку в

уравнения движения входят именно ускорения, то обычно нам нужна именно последняя форма уравнений связи.

2. В случае, когда ограничения связей носят более сложный вид, и особенно тогда, когда в системе есть несколько связей разных типов, прямая запись через координаты может быть неудобна. В этих случаях лучше использовать метод *виртуальных перемещений* (так мы будем называть небольшие «воображаемые» перемещения тел, которые могут и не совпадать с их реальными перемещениями). Идея этого метода состоит в следующем: если движение двух (или более) тел подчинено какому-либо ограничению, накладываемому связью, то мы можем задать виртуальные смещения всех тел, кроме одного. Благодаря связи смещение этого последнего тела должно (с помощью геометрических соотношений) выражаться через заданные смещения остальных. Полученное соотношение для приращений координат после деления на приращение времени Δt становится уравнением связи для скоростей. Из него получается и уравнение связи для ускорений.

Проще всего решаются задачи динамики, в которых тела движутся вдоль одной прямой или по окружности с постоянной скоростью. В этих случаях часто одних лишь уравнений движения ($ma_x = \sum F_x$ для прямолинейного движения каждого тела, $m\frac{v^2}{R} = F_r$ для центростремительного ускорения при движении по окружности) достаточно для нахождения всех величин, характеризующих движение. В несколько более сложных случаях эти уравнения комбинируются с условиями связи.