

Подготовка к олимпиадам МГУ по физике

Теоретический обзор к занятию 2.

Темы: кинематика плоскопараллельного движения твердого тела.

Основные понятия:

- **Твердое тело** – тело, деформациями (изменением формы и размеров) которого можно пренебречь при выбранном уровне точности описания («в условиях данной задачи»).
- **Плоское (плоскопараллельное) движение твердого тела** – движение, при котором каждая из точек тела движется в одной плоскости. Плоскости движения разных точек при таком движении параллельны друг другу.

Определения:

- Центр масс тела – точка, перемещение которой при движении тела совпадает с перемещением материальной точки с массой, равной массе тела под действием тех же сил. Координата центра масс тела, состоящего из N материальных точек, определяется

из соотношения:
$$\vec{r}_{цм} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N}$$

Движения твердого тела можно описать как комбинацию движения его центра масс и вращения вокруг центра масс (первое обусловлено действующими на тело силами в соответствии со 2 законом Ньютона, второе – суммарным моментом этих сил относительно оси, проходящей через центр масс). Полезно также использовать при описании движения твердого тела представление о *мгновенной оси вращения* – в каждый момент времени существует такая ось, что движение тела представляет собой вращение вокруг этой оси. Поэтому вектор скорости любой точки тела направлен перпендикулярно линии, соединяющей ее с мгновенным центром вращения, а величина скорости равна произведению угловой скорости на расстояние до мгновенной оси вращения.

Кинематические характеристики, используемые для описания движений твердых тел – те же, что использовались и для материальных точек. Для каждой из точек тела можно ввести скорость и ускорение как пределы отношения малых приращений (производные). Можно использовать «естественное» разложение ускорения на касательную (тангенциальную) и центростремительную (нормальную) составляющие. Нетрудно понять, что скорости и ускорения разных точек тела могут отличаться друг от друга. При этом скоростью и ускорением тела называют скорость и ускорение его центра масс. Для вращательного движения, которое естественно описывать как изменение угла поворота тела вокруг некоторой оси, можно ввести мгновенное значение *угловой скорости* и *углового ускорения*:

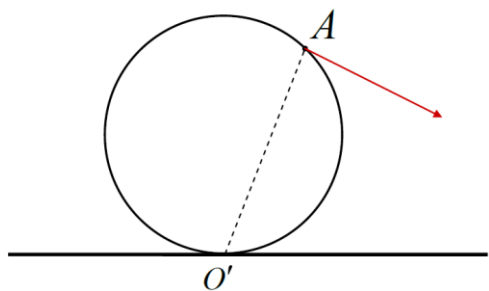
$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \varphi'_t \equiv \omega, \quad \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \omega'_t \equiv \varepsilon.$$

Ясно, что при отсутствии деформаций за малый интервал времени все точки тела должны поворачиваться на один и тот же угол, поэтому угловую скорость и ускорение можно считать характеристиками, относящимися ко всему телу. Более того, эти величины не зависят и от выбора «выделенной» точки!

Для успешного решения задач, посвященных движениям твердых тел, надо уметь находить положение центра масс и мгновенной оси (мгновенного центра) вращения. Центр масс можно находить по данному выше определению. Ясно также, что для однородных симметричных тел центр масс всегда принадлежит каждой из осей и каждой из плоскостей симметрии тела. Поэтому если у такого тела существует геометрический центр – единственная точка, через которую проходят все оси и плоскости симметрии, то он и является центром масс.

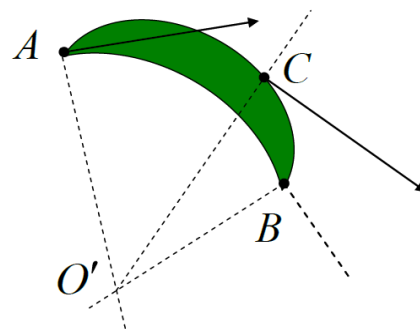
Способы нахождения мгновенной оси вращения обсудим более подробно. Во-первых, нетрудно заметить, что если одна из точек тела в данный момент времени неподвижна (ее мгновенная скорость равна нулю), то она обязательно лежит на мгновенной оси вращения и является мгновенным центром вращения для точек, движущихся с ней в одной плоскости.

Например, для плоского колеса, которое катится без проскальзывания по неподвижной поверхности, мгновенный центр вращения – это точка соприкосновения с поверхностью («отсутствие проскальзывания» как раз и означает, что скорость этой точки равна скорости поверхности).



Таким образом, мы легко можем определить «мгновенное» направление движения любой другой точки колеса: она движется перпендикулярно линии, соединяющей ее с мгновенным центром вращения. Если нам известна угловая скорость колеса ω , то мы найдем и величину скорости любой точки, например: $|\vec{v}_A| = \omega \cdot |O'A|$.

Во-вторых, если нам известны направления движения двух произвольных точек (причем соответствующие прямые лежат в одной плоскости), то мы можем найти мгновенный центр вращения как пересечение перпендикуляров к этим направлениям: например, на рисунке мгновенный центр вращения определен по движению точек А и В. Для любой другой точки (к примеру, для точки С) мы снова можем определить построением направление движения.



Если нам известна еще и величина скорости одной из точек, то можно найти угловую скорость вращения тела

$$\omega = \frac{|\vec{v}_A|}{|O'A|}$$

и скорости всех остальных точек $|\vec{v}_B| = \omega \cdot |O'B|$, $|\vec{v}_C| = \omega \cdot |O'C|$, ...

Особый случай – когда две точки твердого тела движутся в одинаковом направлении. В этом случае перпендикуляры к направлениям движения не пересекаются. Однако такая ситуация может возникнуть всего лишь в трех простых случаях. Первый - когда эти две точки принадлежат одной плоскости движения, причем перпендикуляры к скоростям не совпадают. Тогда тело должно двигаться поступательно (поскольку прямую можно рассматривать как окружность бесконечно большого радиуса, то можно считать, что центр вращения в этом случае находится бесконечно далеко). Второй – когда перпендикуляр к скоростям у этих точек оказывается общим – соответствует ситуации, когда выделенные точки оказались на одном радиусе, вращающемся вокруг мгновенного центра. Третий - когда обе точки оказались движущимися в одной плоскости только потому, что лежат на оси вращения тела, совершающей поступательное движение (ясно, что в этом случае скорости точек одинаковы). В каждом из этих случаев при наличии необходимой дополнительной информации движение тела достаточно легко анализируется.

Наконец, при изучении движений твердых тел часто весьма полезными оказываются *условия связи* скоростей и ускорений точек, появляющиеся из геометрических условий на взаимное положение точек. Например: если расстояние между точками А и В неизменно, то (в чем нетрудно убедиться) проекции их скоростей на соединяющую их прямую должны совпадать. Ясно, что это утверждение может быть отнесено не только к точкам твердых тел, но и в любом случае, когда расстояние не меняется – в частности, к точкам натянутой нерастяжимой нити. Отсюда следует, что если одна из точек натянутой нерастяжимой нити закреплена, то скорости остальных точек нити либо равны нулю, либо направлены перпендикулярно нити.