

Эта тема закладывает основы почти всех представлений, на которых строится курс механики, поэтому начнем «с самого начала»:

Основные понятия:

Пространство и время – атрибуты материального мира, восприятие которых позволяет нам разбивать его на более простые структурные элементы. В пространстве существуют тела, способные двигаться (изменять положение в пространстве с течением времени). Пространственные свойства тел и отношения между ними (протяженность, взаимное расположение) описываются в механике с помощью трехмерной евклидовой геометрии. Временные свойства событий (последовательность, длительность) описываются с помощью представления об универсальной временной координате.

Механическое движение – изменение положения в пространстве одного тела относительно другого с течением времени.

Материальная точка – массивное тело, размерами которого можно пренебречь при выбранном уровне точности описания («в условиях данной задачи»). В механике считается, что движение любого тела можно описать, разбив его на материальные точки.

Система отсчета – твердое тело, с которым жестко связана система координат, снабженное прибором для измерения времени.

Определения:

Вектор координаты – вектор, проведенный из начала координат в заданную точку.

Перемещение – изменение вектора координаты за время Δt : $\Delta \vec{r} \equiv \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$

Величина перемещения – модуль вектора перемещения.

Траектория – линия в пространстве, которую описывает при движении конец вектора координаты.

Путь – длина траектории.

Мгновенная скорость – отношение перемещения за бесконечно малый интервал времени dt к величине этого интервала: $\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \vec{r}'_t$ (ясно, что это векторная величина).

Средняя скорость на участке пути – отношение пути к величине интервала времени, за который он был пройден.

Ускорение – отношение приращения скорости за бесконечно малый интервал времени dt к величине этого интервала: $\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \vec{v}'_t$.

Угол поворота – угол, на который отклоняется вектор координаты от начального направления (обычно – от оси абсцисс системы координат). По соглашению за положительное направление поворота принимается направление против часовой стрелки.

Угловая скорость – скорость изменения угла поворота: $\omega \equiv \frac{d\varphi}{dt} \equiv \varphi'$.

Твердое тело – тело, деформациями (изменением формы и размеров) которого можно пренебречь при выбранном уровне точности описания («в условиях данной задачи»).

Плоское (плоскопараллельное) движение твердого тела – движение, при котором каждая из точек тела движется в одной плоскости. Плоскости движения разных точек при таком движении параллельны друг другу.

Центр масс тела – точка, перемещение которой при движении тела совпадает с перемещением материальной точки с массой, равной массе тела под действием тех же сил. Координата центра масс тела, состоящего из N материальных точек, определяется из соотношения:

$\vec{r}_{cm} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N}$. Для однородных симметричных тел центр масс всегда

принадлежит каждой из осей и каждой из плоскостей симметрии тела. Поэтому если у такого

тела существует геометрический центр – единственная точка, через которую проходят все оси и плоскости симметрии, то он и является центром масс.

Все многообразие движений, рассматриваемых в олимпиадных задачах, в целом должны сводиться к относительно простым «стандартным» движениям, набор которых ограничен школьной программой. Перечислим эти стандартные движения и описывающие их формулы (законы изменения координаты, скорости и ускорения):

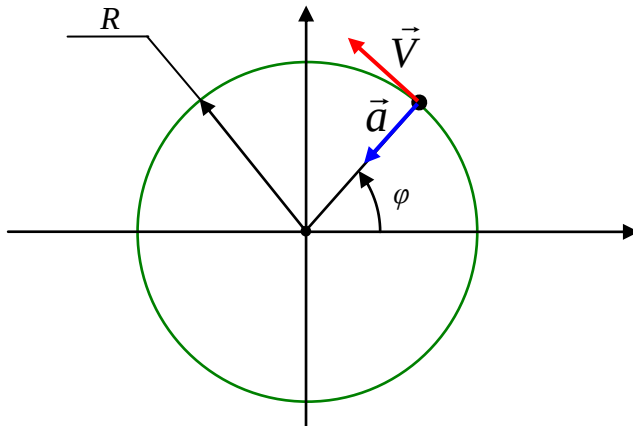
Равномерное прямолинейное (поступательное) движение вдоль оси x :

$$a = 0, \quad v = v_0 = \text{const}, \quad x(t) = x_0 + v_0 t$$

Равноускоренное движение по оси x :

$$a = \text{const}, \quad v(t) = v_0 + at, \quad x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Равномерное движение по окружности радиуса R :



$$\omega = \text{const}, \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \omega t,$$

$$x(t) = R \cdot \cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$y(t) = R \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$|\vec{v}| = \omega R = \text{const},$$

$$|\vec{a}| = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} = \text{const}$$

(вектор скорости направлен по касательной к окружности, а вектор ускорения – к ее центру).

Гармонические колебания по оси x : $x(t) = x_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$,

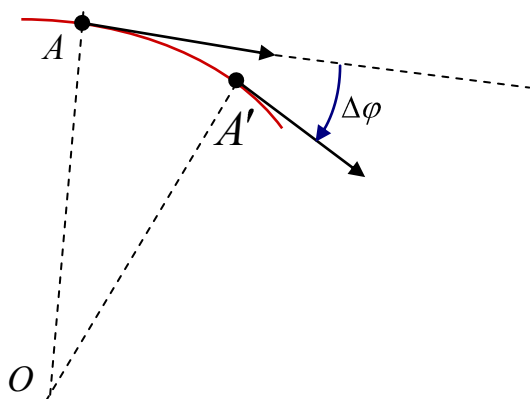
$$v_x(t) = -\omega x_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = v_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}) \quad (v_m = \omega x_m),$$

$$a_x(t) = -\omega^2 x_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = a_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi) \quad (a_m = \omega^2 x_m).$$

Здесь x_m – амплитуда, ω – циклическая частота, а φ_0 – начальная фаза колебаний. Период колебаний связан с циклической частотой соотношением $T = 2\pi / \omega$.

Отметим, что все «сложные» движения материальной точки могут быть получены как комбинации стандартных (самый известный пример – движение по параболе тела, брошенного под углом к горизонту, которое рассматривается как комбинация равномерного движения по горизонтали и равноускоренного по вертикали).

В частности, описание произвольного **криволинейного движения** может быть построено на основании представления его в виде **комбинации** прямолинейного равноускоренного и равномерного движения по окружности. Действительно, вектор скорости направлен по касательной к траектории и изменение величины скорости на бесконечно малом участке траектории описывается так же, как при прямолинейном движении вдоль касательной.



С другой стороны, изгиб бесконечно малого участка траектории всегда можно представить как поворот вдоль дуги окружности, на которой вектор скорости поворачивается на тот же угол. Если на малом участке траектории длиной Δl вектор скорости (вместе с направлением касательной к траектории) поворачивается на угол $\Delta\varphi$, то мгновенный центр вращения лежит на пересечении перпендикуляров к векторам скорости в начале и конце участка: В пределе $\Delta l \rightarrow 0$ расстояния $|OA| = |OA'| \equiv R$.

Величину R естественно назвать *мгновенным*

радиусом вращения точки. Как видно из определения, эту величину можно находить из

геометрических соображений: $\Delta l = R \Delta \varphi \Rightarrow R = \left(\frac{\Delta l}{\Delta \varphi} \right)_{\Delta \varphi \rightarrow 0}$, или из кинематических:

$$v = R \omega \Rightarrow R = \frac{v}{\omega} \text{ (ясно, что с учетом определения линейной и угловой скоростей эти способы}$$

полностью эквивалентны). В действительности связь между Δl и $\Delta \varphi$ - чисто геометрическое соотношение, поэтому R есть геометрическая характеристика данного участка траектории, и R часто называют *радиусом кривизны* траектории в данной точке. Ясно, что R не зависит от линейной и угловой скоростей: для двух тел, движущихся по одной и той же траектории с разными скоростями, радиус кривизны в любой из точек траектории одинаков.

Ускорение тела при движении по криволинейной траектории возникает из-за изменения скорости – как по величине, так и по направлению. Изменение величины скорости при неизменном направлении приводит (как в случае прямолинейного движения) к появлению ускорения, направленного вдоль (при увеличении v) или против (при уменьшении) скорости, то есть по касательной к траектории. В проекции на направление скорости величина этой компоненты ускорения равна v'_t . Изменение направления вектора скорости без изменения величины приводит (как в случае равномерного вращения) к появлению центростремительного ускорения. Поэтому в общем случае ускорение тела есть векторная сумма двух взаимно перпендикулярных составляющих – касательного (или *тангенциального*) и центростремительного (*нормального*) ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{кас}} + \vec{a}_{\text{цс}} = v'_t \cdot \vec{e}_{\text{кас}} + \frac{v^2}{R} \cdot \vec{e}_{\text{цс}}$$

(в этой формуле $\vec{e}_{\text{кас, цс}}$ - единичные по модулю векторы, направленные соответственно вдоль скорости и к мгновенному центру вращения). Такое разложение ускорения называют *естественным*. Часто в кинематических задачах именно оно оказывается наиболее удобным.

Нетрудно заметить, что большинство кинематических понятий имеют геометрическое происхождение, да и вся кинематика есть не что иное, как «геометрия в движении». Очень важно научиться искать наиболее простые пути геометрического анализа для каждого конкретного движения, то есть разумно подходить к выбору Системы Отсчета и Системы Координат. Следует отметить, что на самом деле такое умение приходит с опытом, то есть для его выработки необходимо практиковаться в решении кинематических задач. В значительной мере направляющую роль должно играть именно понимание того, как заданное движение разбивается в комбинацию «стандартных».

С учетом всего сказанного, можно предложить следующую «общую схему» решения кинематических задач:

Шаг 0: Анализ предложенного движения, то есть «узнавание» в нем одного из «стандартных» или их комбинации. Этот шаг – подготовительный, он нужен для облегчения следующего.

Шаг 1: Выбор СО и СК, обеспечивающий наиболее простое описание движения. Обычно логично выбирать их так, чтобы заданные и (или) искомые величины находились в них наиболее просто. В частности, обычно выгодно направлять координатные оси по направлениям «стандартных» прямолинейных движений, входящих в состав описываемого.

Шаг 2: Записать в выбранных координатах формулы, описывающие заданное в условии задачи движение (закон движения, закон изменения скорости или ускорения).

Шаг 3: Записать через те же величины заданную в условии дополнительно информацию (геометрические соотношения, информацию о временных промежутках и т.д.).

Шаг 4: Из записанных соотношений выразить искомую величину.

Примеры использования этого алгоритма приведены на занятии.