

**Кинематика твёрдого тела.  
Сложные вопросы курса физики.  
Методика решения задач**

**Москва, 2010/2011**



## Содержание лекции

1. Поступательное и вращательное движения твердого тела
2. Сложение поступательного и вращательного движений
3. Плоское движение
4. Мгновенная ось вращения
5. Примеры решения задач



## Поступательное и вращательное движения твердого тела

В общем случае различные части реального тела могут двигаться по-разному. По этой причине *движение реального тела считают описанным полностью лишь тогда, когда известно, как движется каждая его точка.*

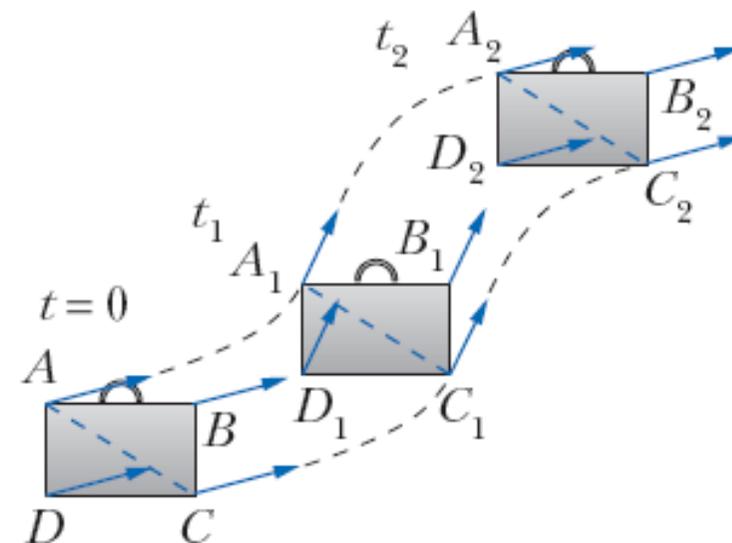
Реальное тело состоит из огромного числа точек (строго говоря, их бесконечно много).

Довольно часто реальное тело заметно деформируется в процессе движения.

**Тело называют твёрдым (абсолютно твёрдым), если расстояние между любыми двумя точками тела не изменяется с течением времени.**

Другими словами, тело называют твёрдым, если не изменяется взаимное расположение его частей. Разумеется, в природе абсолютно твёрдых тел нет. Твёрдое тело — это модель.

Рассмотрение движения твёрдых тел начинают с самых простых видов движения: *поступательного и вращательного.*



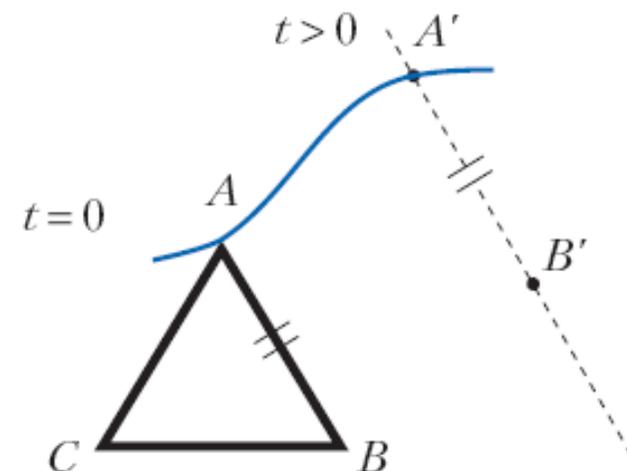


Движение твёрдого тела называют **поступательным**, если прямая, проведённая через любые две точки этого тела, в процессе движения не изменяет своей ориентации в пространстве (остаётся параллельной своему начальному положению).

*В каждый момент времени все точки поступательно движущегося твёрдого тела имеют одинаковые скорости и ускорения.*

Вывод: для описания поступательного движения твёрдого тела достаточно описать движение (задать закон движения) какой-либо **одной его точки**.

Другими словами, если известны закон движения одной точки поступательно движущегося твёрдого тела и начальное положение этого тела, то можно определить положение любой другой точки этого тела в каждый последующий момент времени. В этом случае можно говорить, что движение тела описано полностью.





Движение твёрдого тела называют вращательным, если все точки этого тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной *неподвижной* прямой. Эту прямую называют осью вращения.

При вращательном движении твёрдого тела угловые скорости движения всех его точек равны. Эту скорость и называют угловой скоростью вращения  $\omega$  твёрдого тела.

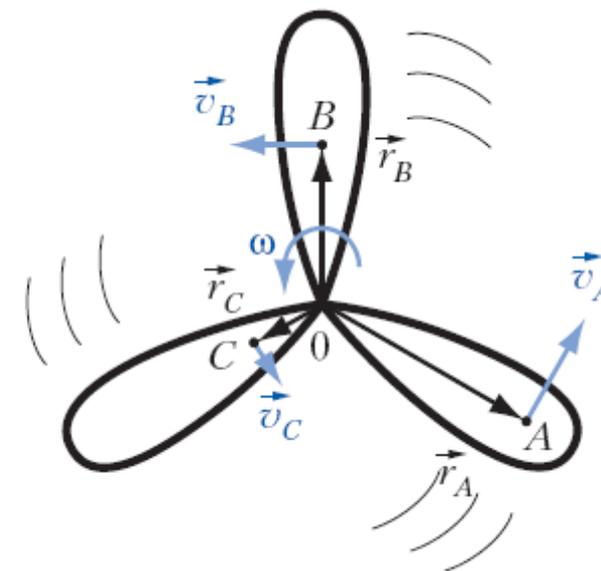
$$v_A = \omega \cdot r_A = \omega \cdot OA,$$

$$v_B = \omega \cdot r_B = \omega \cdot OB,$$

$$v_C = \omega \cdot r_C = \omega \cdot OC.$$

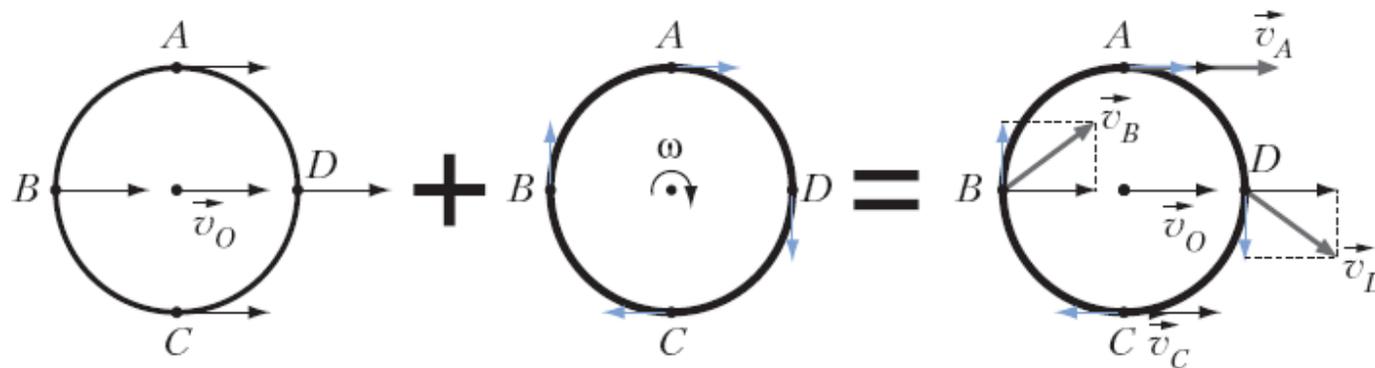
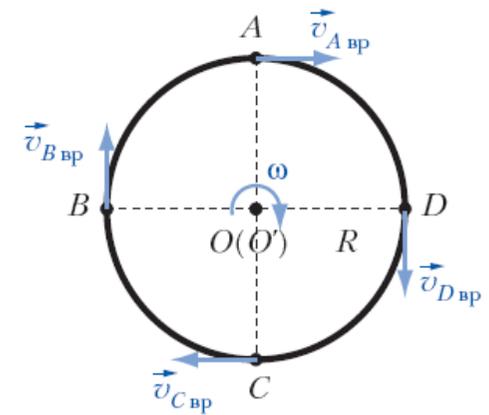
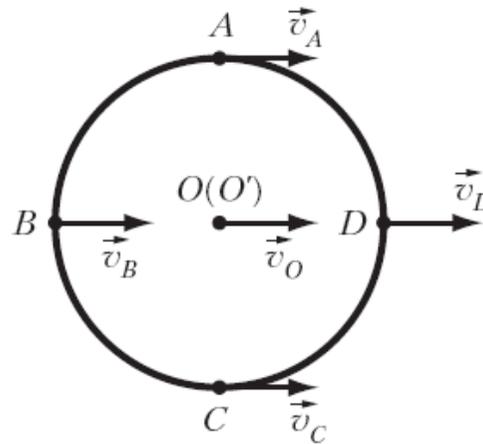
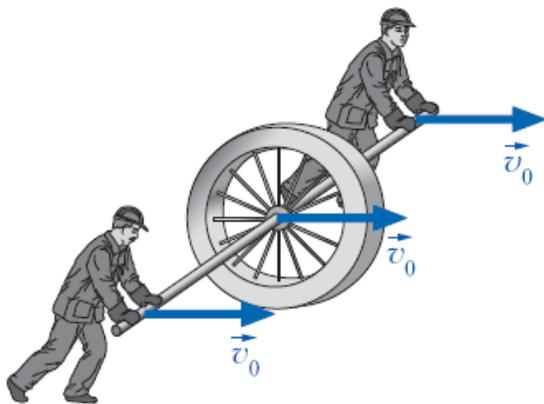
Так как  $OA > OB > OC$ , то, следовательно,  $v_A > v_B > v_C$ .

Чем дальше от оси вращения расположена точка вращающегося твёрдого тела, тем больше модуль её скорости, обусловленной вращательным движением.





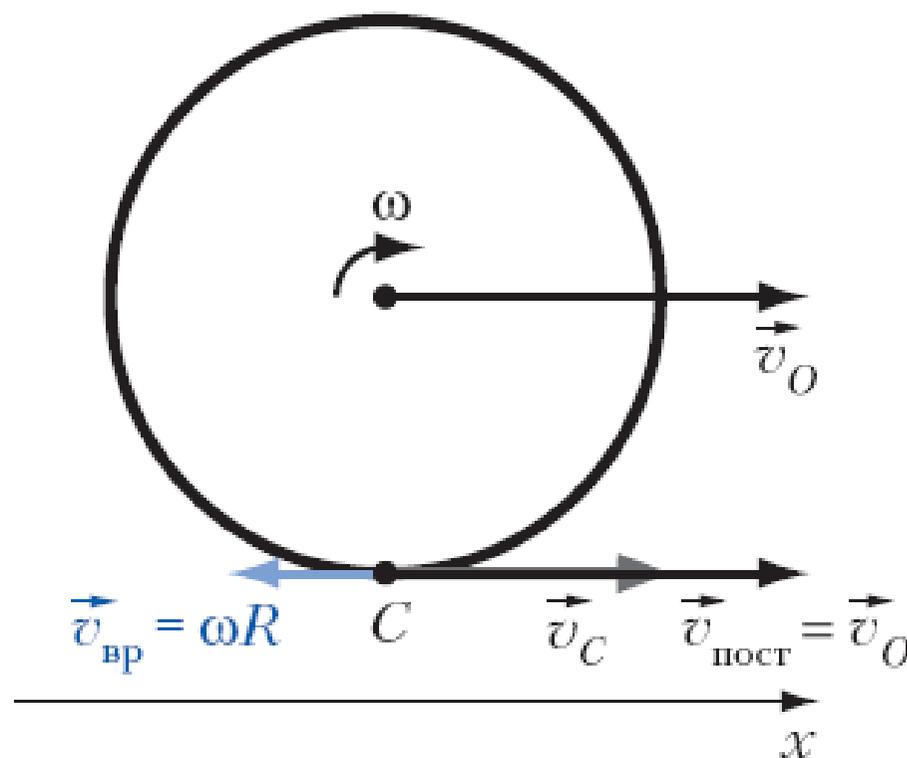
# Сложение поступательного и вращательного движений





1) Пусть  $v_0 > \omega R$

*a*

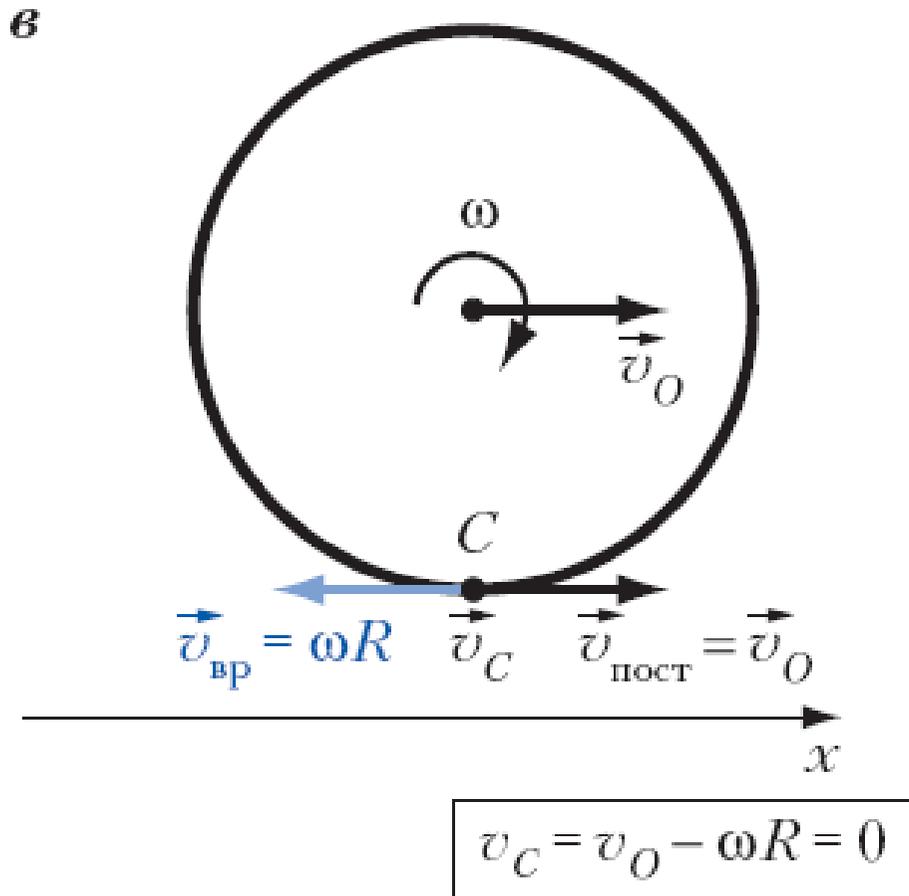


$$v_C = v_0 - \omega R > 0$$





3) Теперь рассмотрим случай  $v_O = \omega \cdot R$

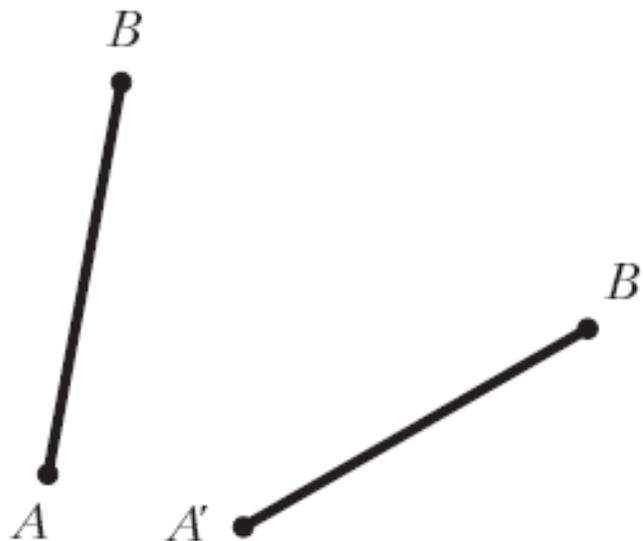




## Плоское движение. Мгновенная ось вращения

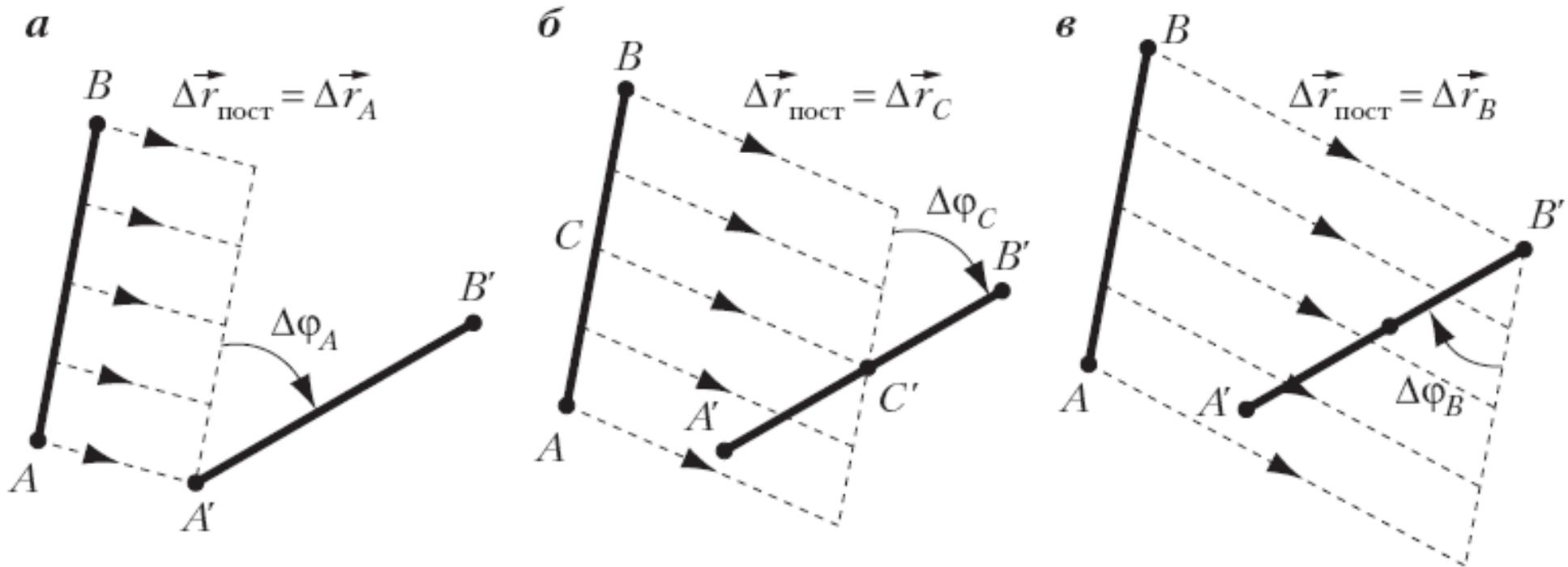
Движение твёрдого тела называют плоским, если все точки этого тела движутся в параллельных друг другу плоскостях.

Из определения следует, что плоское движение можно изобразить на плоскости (на листе бумаги), если расположить этот лист параллельно плоскостям, в которых движутся точки твёрдого тела.





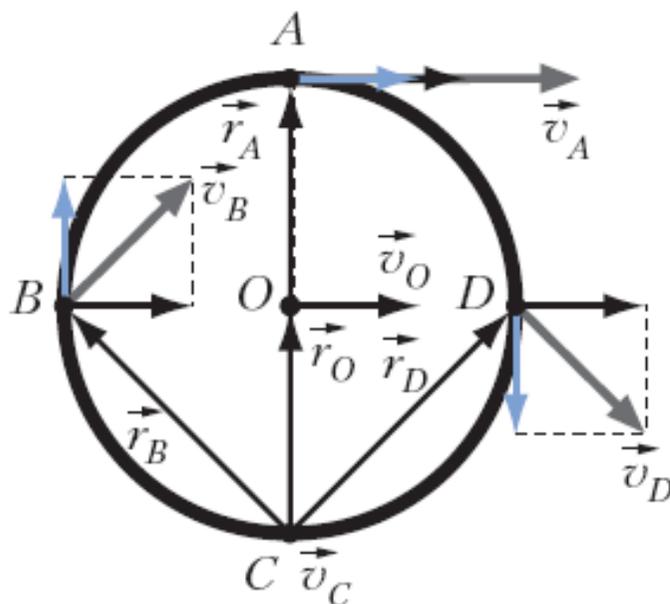
При любом разбиении плоского движения стержня на поступательное и вращательное, поворот стержня за рассматриваемый промежуток времени  $\Delta t$  будет осуществляться на один и тот же угол  $\Delta\varphi$  (сравните углы  $\Delta\varphi_A$ ,  $\Delta\varphi_B$  и  $\Delta\varphi_C$  на рис.). Следовательно, угловая скорость  $\omega$  вращения твёрдого тела при любом разбиении его плоского движения на поступательное и вращательное будет одной и той же.





Напротив, скорости поступательного движения твёрдого тела при различных разбиениях его плоского движения будут отличаться как по модулю, так и по направлению. Это связано с тем, что перемещения за время  $\Delta t$ , обусловленные поступательным движением, отличаются друг от друга (рис.).

Плоское движение твёрдого тела в каждый момент времени можно представить как чисто вращательное, которое совершается вокруг так называемой мгновенной оси вращения.



$$v_A = v_O + \omega \cdot R = \omega \cdot 2R = \omega \cdot r_A$$

$$v_B = \omega \cdot \sqrt{2R} = \omega \cdot r_B$$

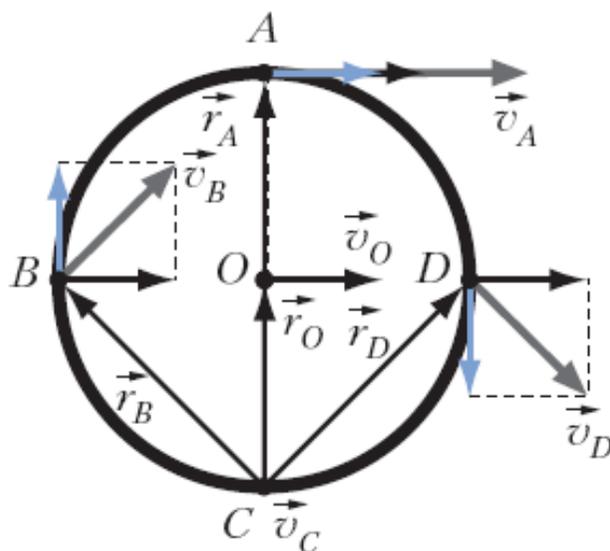
$$v_C = 0$$

$$v_D = \omega \cdot \sqrt{2R} = \omega \cdot r_D$$



В данный момент времени колесо совершает чисто вращательное движение вокруг оси, которая перпендикулярна плоскости рисунка и проходит через точку  $C$ .

Понятно, что в любой последующий момент времени положение оси, проходящей через точку касания дороги колесом, будет иным. Следовательно, утверждение о чисто вращательном движении колеса вокруг оси, проходящей через точку  $C$ , справедливо только для данного момента времени (данного мгновения). На этом основании такую ось и называют *мгновенной осью вращения*.



$$v_A = v_O + \omega \cdot R = \omega \cdot 2R = \omega \cdot r_A$$

$$v_B = \omega \cdot \sqrt{2}R = \omega \cdot r_B$$

$$v_C = 0$$

$$v_D = \omega \cdot \sqrt{2}R = \omega \cdot r_D$$



## Ключевые вопросы по теории

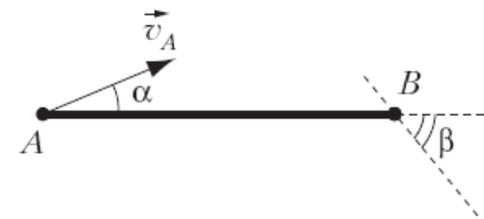
1. В каком случае говорят, что движение реального тела описано полностью?
2. Какое тело называют твёрдым?
3. Какое движение твёрдого тела называют поступательным?
4. Что необходимо задать для описания поступательного движения твёрдого тела?
5. Какое движение твёрдого тела называют вращательным?
6. Приведите примеры поступательного и вращательного движений твёрдых тел.
7. Какое движение твёрдого тела называют плоским?
8. На какие виды движения можно разложить плоское движение? Является ли такое разложение единственно возможным?
9. Опишите три варианта движения колеса по дороге.
10. Можно ли плоское движение представить в виде только вращательного? Как в этом случае называют ось вращения?
11. Через какую точку в каждый момент времени проходит мгновенная ось вращения катящегося без проскальзывания колеса?



## Примеры решения задач

### Задача 1. Движение твёрдого стержня по плоскости

Твёрдый тонкий стержень  $AB$  скользит по плоскости. Известно, что в некоторый момент времени скорость точки  $A$  стержня равна по модулю  $v_A$  и составляет со стержнем угол  $\alpha$ . Скорость точки  $B$  в этот же момент времени составляет со стержнем угол  $\beta$ . Определите модуль скорости движения точки  $B$ .



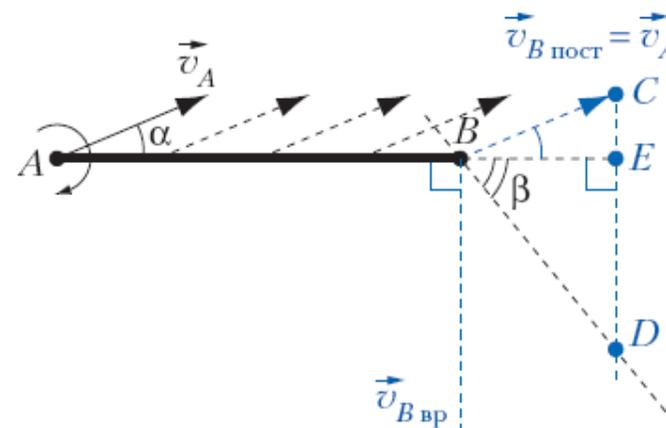
$$\vec{v}_B = \vec{v}_{B \text{ пост}} + \vec{v}_{B \text{ вр}}$$

$$BE = BC \cdot \cos \alpha = v_{B \text{ пост}} \cdot \cos \alpha = v_A \cdot \cos \alpha.$$

$$BE = BD \cdot \cos \beta = v_B \cdot \cos \beta.$$

Следовательно но,  $v_A \cdot \cos \alpha = v_B \cdot \cos \beta$ . (1).

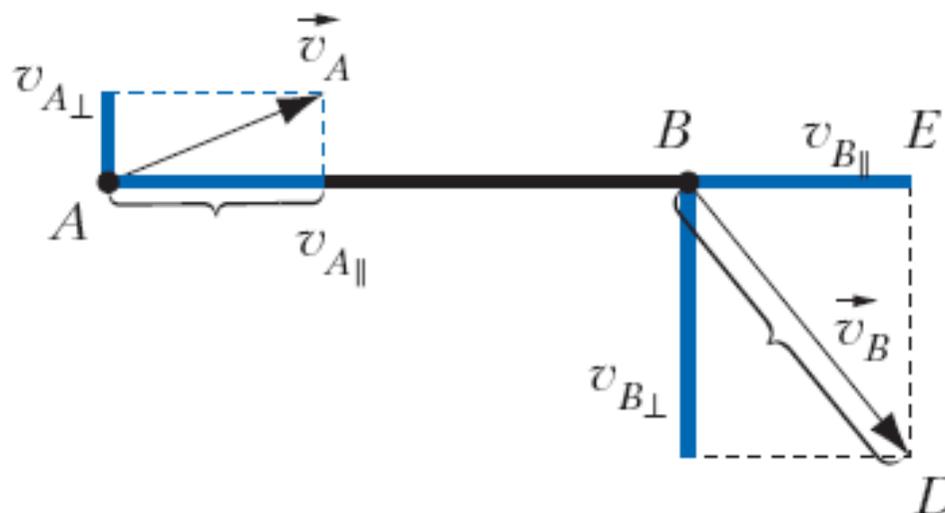
Откуда находим: 
$$v_B = \frac{v_A \cdot \cos \alpha}{\cos \beta}.$$





Разложим каждую из скоростей точек  $A$  и  $B$  стержня на две составляющие: параллельные стержню  $AB$  и перпендикулярные ему (рис.). Из соотношения (1) следует, что  $v_{A\parallel} = v_A \cdot \cos\alpha = v_B \cdot \cos\beta = v_{B\parallel}$ , т. е.  $v_{A\parallel} = v_{B\parallel}$ .

При любом плоском движении тонкого твёрдого стержня проекции скоростей его концов на ось, параллельную оси стержня, равны. Действительно, если бы эти проекции различались, то, очевидно, длина твёрдого стержня изменялась бы с течением времени. Отметим, что составляющие скоростей концов стержня, которые перпендикулярны его оси, не влияют на изменение его длины (подумайте почему?).



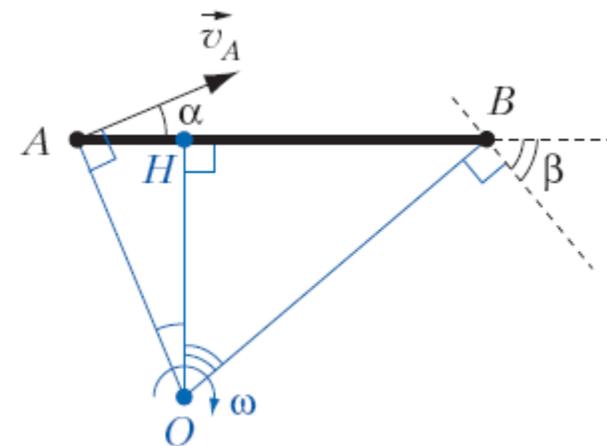


Ещё один способ решения задачи 1.

Пусть  $\omega$  — угловая скорость вращения стержня. Тогда  $v_A = \omega \cdot OA$ ,  $v_B = \omega \cdot OB$ . Из построения следует, что угол  $AOH = \alpha$  и угол  $BOH = \beta$ . Поэтому  $OH = OA \cdot \cos\alpha = OB \cdot \cos\beta$ .

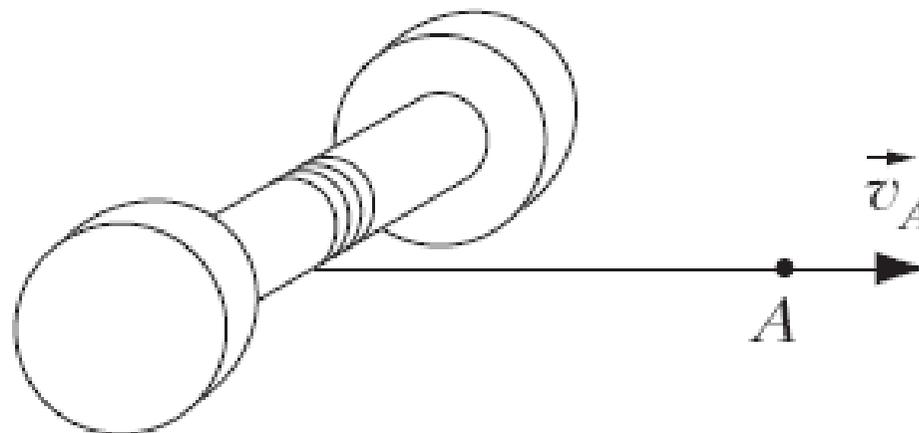
Следовательно  $v_A = \frac{\omega \cdot OH}{\cos\alpha}$ ,  $v_B = \frac{\omega \cdot OH}{\cos\beta}$ .

$\omega \cdot OH = v_A \cdot \cos\alpha = v_B \cdot \cos\beta$ .



**Задача 2. Движение катушки с нитью.**

Катушку, лежащую на горизонтальной крышке стола, тянут за конец  $A$  нерастяжимой нити, которая намотана на среднюю часть катушки. При этом катушка катится без проскальзывания и её ось не изменяет своей ориентации относительно стола. Скорость движения точки  $A$  нити постоянна и равна  $\vec{v}_A$ . Определите скорость движения оси  $O$  катушки, если радиус  $r$  её средней части в 2 раза меньше радиуса  $R$  её щёк.





$$v_{B \text{ гор}} = v_{A \text{ гор}} = v_A. \quad (2).$$

Пусть  $\vec{v}_O$  — скорость оси  $O$  катушки.

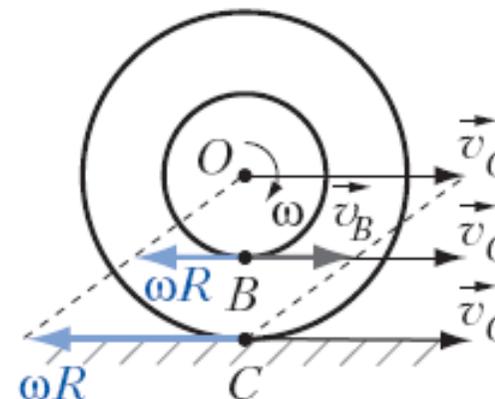
Будем рассматривать плоское движение катушки как суперпозицию поступательного движения со скоростью  $\vec{v}_O$  и вращательного движения вокруг оси  $O$  с угловой скоростью  $\omega$  (рис.).

$$v_C = v_O - \omega \cdot R = 0.$$

Поэтому: 
$$\omega = \frac{v_O}{R} \quad (3)$$

$$v_B = v_O - \omega \cdot r = v_O - \frac{r \cdot v_O}{R} = v_{B \text{ гор}}$$

$$v_O = \frac{v_A \cdot R}{R - r} = 2 \cdot v_A$$



$$v_C = v_O - \omega R = 0$$

$$v_B = v_O - \omega R = r$$

*Ответ:*  $v_O = 2 \cdot v_A$ .

При плоском движении катушки без проскальзывания скорость движения её оси по модулю больше, чем скорость движения руки, которая тянет нить. Этим объясняется, почему катушка догоняет руку, тянущую её за нить.



## Итоги лекции

- Рассмотрены принципы описания плоского движения твердого тела
- Сформулированы ключевые вопросы по данной теме
- Рассмотрены методы решения задач
- Дополнительные материалы к курсу можно найти в учебниках и рабочих тетрадях по физике авторов лекций:  
[http://genphys.phys.msu.ru/rus/gen\\_school/base\\_school.php](http://genphys.phys.msu.ru/rus/gen_school/base_school.php)  
<http://www.vgf.ru>