

Работа №1

Деформационные свойства полимерных материалов Линейная вязкоупругая модель

Цель работы

Экспериментальное исследование деформационных свойств конкретного полимера - полиметилметакрилата. Проверка применимости линейной модели вязкоупругости для описания деформационных свойств исследуемого материала.

Общие сведения

Основные особенности структурного строения и деформирования полимеров

Известно, что полимеры широко используются в различных областях народного хозяйства. Объясняется это, прежде всего, тем, что их физико-механические свойства позволяют резко улучшить эксплуатационные качества и технологичность различных машин и механизмов и, следовательно, расширить сферу их применения. Поэтому понятен огромный интерес к изучению полимеров вообще и в особенности к исследованию их механического поведения [1,2,3].

Отметим, что деформационные и прочностные свойства материалов тесно связаны с их молекулярным строением [4]. Полимеры отличаются от обычных материалов большим молекулярным весом. Это достигается в результате соединения мономерных единиц. При полимеризации образуются цепные молекулы, длина которых значительно превышает их поперечные размеры. Следствием такого строения цепных молекул является их гибкость, которая проявляется тем заметнее, чем меньше взаимодействие их звеньев со своими соседями или еще чаще нарушается межмолекулярное взаимодействие вследствие теплового движения. Цепные молекулы могут либо легко изменять свою форму, либо деформироваться только под воздействием больших внешних сил. В первом случае полимер будет эластичным. Если деформация цепных молекул при нормальных условиях затруднена, то такие полимеры обычно находятся в застеклованном или кристаллическом состоянии и проявляют высокоэластичность только при достаточно высоких температурах. (Большие (могут достигать многих сотен процентов) обратимые деформации полимеров называют высокоэластичными)

Размер цепных молекул, определяющий их молекулярный вес, относится к важнейшим характеристикам полимеров. На механические

свойства полимеров оказывают большое влияние степень разветвленности цепных молекул, упрочнение структуры в результате сшивания линейного полимера в трехмерную структурную сетку, а также характер надмолекулярных образований полимеров, то есть взаимной упаковки макромолекул. Надмолекулярные образования в полимерах могут иметь различную форму, они образуются не только в кристаллических, но и в аморфных полимерах.

Одной из особенностей кристаллизирующихся полимеров является отсутствие полной кристалличности. Это связано с невозможностью встраивания искривленных и несовершенных участков макромолекул в правильную кристаллическую решетку. Обычно степень кристалличности колеблется в пределах 30 – 80% , то есть любой кристаллический полимер является фактически аморфно-кристаллическим. Кристаллические области в нем всегда разделены аморфными прослойками.

Кристаллические структуры в полимерах являются, вообще говоря, термодинамически стабильными образованиями. Тем не менее, в процессе деформирования возможно их разрушение с последующим перестроением и восстановлением в новых положениях и ориентациях. Данный процесс получил название рекристаллизации. Он играет важную роль, например, обеспечивая фиксацию ориентированной структуры полимера при так называемой холодной вытяжке, сопровождаемой прохождением по образцу устойчивой шейки. Холодная вытяжка является специфическим для полимерной среды процессом, лежащим в основе технологии получения высокопрочных ориентированных волокон и пленок. Полимеры, не обладающие способностью кристаллизоваться, находятся в аморфном состоянии. Для аморфных полимеров также установлено наличие большого разнообразия надмолекулярных образований. Итак, полимеры могут находиться в двух агрегатных состояниях (жидком и твердом), двух фазовых состояниях (аморфном и кристаллическом) и трех деформационных физических состояниях (стеклообразном, высокоэластическом и вязкотекучем). Границы между этими физическими состояниями характеризуют значениями температур стеклования T_C и текучести $T_T (T_T > T_C)$. При низких температурах все полимеры деформируются так же, как и твердые тела. В стеклообразном состоянии (малые напряжения) наблюдается только упругая деформация $\epsilon_{упр}$. Такая деформация связана с изменением средних межатомных и межмолекулярных расстояний в полимере, а также с деформацией макромолекул. Выше температуры стеклования T_C к этой деформации добавляется высокоэластическая составляющая $\epsilon_{вэл}$, которая превосходит упругую составляющую в многие сотни раз. Эта деформация является квазиупругой в том смысле, что она обратима и исчезает после снятия нагрузки.

Процессы деформирования и возврата при этом, хотя и происходят во времени, но протекают довольно быстро. Выше температуры текучести T_T проявляется еще одна составляющая деформации – вязкая $\epsilon_{\text{вяз}}$, которая приводит к постепенному накоплению остаточной (необратимой) деформации образца. Она полностью остается после устранения причин, ее вызвавших. Отметим, что необратимая деформация может состоять из вязкого течения и пластической деформации. При вязком течении скорость деформации пропорциональна приложенному напряжению (ньютоновская вязкость). Пластическая деформация возникает только тогда, когда напряжение достигает некоторой критической величины. В данной работе пластические деформации не рассматриваются.

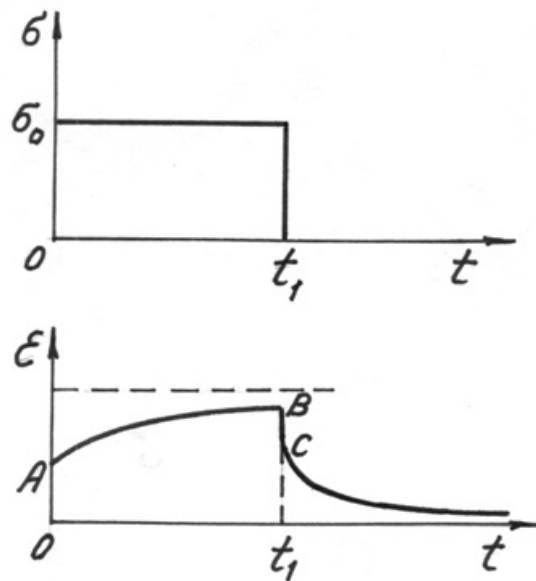
Итак, в общем случае можно записать, что деформация полимера состоит из трех частей: $\epsilon = \epsilon_{\text{упр}} + \epsilon_{\text{вэл}} + \epsilon_{\text{вяз}}$. Они играют различную роль при низких и высоких температурах.

Изотропные полимерные материалы могут быть условно разделены на три группы, в каждой из которых одна из перечисленных компонент деформации при данных условиях является преобладающей: 1) жесткие полимеры, проявляющие малые деформации и обладающие значительно более высоким модулем упругости, чем другие полимеры (полиметилметакрилат, непластифицированный полистирол и полихлорвинил); 2) мягкие эластичные полимерные материалы, обладающие способностью к очень большим (на сотни процентов) обратимым деформациям (натуральные и синтетические каучуки, полиизобутилен), и 3) полимеры, обнаруживающие текучесть при воздействии внешних сил (фенолформальдегидные смолы в начальной стадии отверждения, низкомолекулярные каучуки и другие). Следует иметь в виду, что в зависимости от режима нагружения и температуры преобладание того или иного вида деформации в полимере может существенно изменяться.

Более подробно рассмотрим полимеры, относящиеся к 1-ой группе.

Конструкционные (жесткие) полимерные материалы, используемые в силовых элементах конструкций, имеют высокие температуры стеклования и в комнатных условиях находятся в кристаллическом или в аморфном стеклообразном состояниях. Проявляемая ими деформация в практически важной области напряжений обусловлена упругим и высокоэластическим механизмом деформирования, и она исчезает со временем после снятия нагрузки. В данной области напряжений, как установлено многочисленными экспериментальными исследованиями, для феноменологического описания деформационных свойств жестких полимеров можно использовать линейную теорию вязкоупругости (наследственной упругости).

Особенности деформирования жестких полимеров иллюстрирует рис.1.



Здесь изображена типичная кривая ползучести, наблюдаемая в экспериментах на одноосное нагружение. В момент $t = 0$ к образцу «мгновенно» приложено постоянное напряжение σ_0 , снятое затем при разгрузке в момент времени $t = t_1$. Данный режим нагружения можно представить формулой

$$\sigma_0[h(t) - h(t - t_1)]$$

где $h(t)$ – функция Хевисайда, определяемая условиями $h(t) = 0$ при $t < 0$, $h(t) = 1$ при $t > 0$. В момент нагружения $t = 0$ в образце возникает деформация, называемая мгновенно-упругой, которая остается постоянной пока приложено напряжение. На графике (рис.1) она представлена отрезком OA. В последующие после нагружения моменты времени развиваются запаздывающая упругая (высокоэластическая) деформация и деформация вязкого течения. Процесс этот протекает с непрерывно уменьшающейся скоростью, так что можно формально предположить существование горизонтальной асимптоты. В этом случае говорят, что имеет место ограниченная ползучесть. При высоких напряжениях вне линейной области иногда удается наблюдать выход на режим установившейся ползучести $\frac{d\epsilon}{dt} = const$ с возможностью построения наклонной асимптоты к экспериментальной кривой. Это случай неограниченной ползучести, обусловленной развитием вязкопластических деформаций. Скорость ползучести, высокая сразу после нагружения, быстро падает на непродолжительном начальном временном интервале до очень

малых значений. Схематизируя, можно предположить, что в момент нагружения скорость ползучести бесконечна, т.е. $\frac{d\epsilon}{dt} \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$ и кривая ползучести тогда имеет вертикальную касательную в начале координат. Данное допущение, как станет ясно из последующего, требует использования сингулярных ядер интегрируемого вида в уравнениях состояния.

Разгрузка образца в момент времени $t = t_1$ приводит к исчезновению мгновенно-упругой составляющей деформации (отрезок ВС на рис.1), высокоэластическая составляющая сопровождается постепенным уменьшением оставшейся части деформации вплоть до нуля, а деформация вязкого течения остается постоянной, равной величине, которую она достигла к моменту снятия напряжения. Скорость уменьшения деформаций в образце, начавшись с больших значений сразу после разгрузки, становится затем малой. Для ускоренного достижения полного восстановления исходных размеров образца можно применять нагрев до температуры, слегка превышающей температуру стеклования материала, т.е. выводящей его в область высокоэластичности. В случае неограниченной ползучести нагрев, очевидно, не приводит к полному восстановлению. Оставшаяся необратимая часть деформации определяет накопленную величину вязкопластической составляющей.

Сведения из линейной теории вязкоупругости.

Примером сред, деформирование которых сопровождается временными эффектами, являются вязкоупругие среды. Полимеры с характерными для них проявлениями высокоэластических деформаций являются типичными представителями сред подобного рода. Изучение линейной теории вязкоупругости начнем со знакомства с простейшими моделями вязкоупругого тела для одноосного случая [5].

При механических испытаниях, например, на растяжение, сжатие или кручение, обнаруживается, что однозначной зависимости между напряжением и деформацией не существует и в определяющие уравнения тем или иным способом необходимо вводить время.

Традиционный ход рассуждений приводит к построению определяющих уравнений, содержащих производные от напряжения и деформации: обычно механические процессы описываются с помощью дифференциальных уравнений. В классической механике сплошной среды издавна существуют такие простейшие модели, как модель упругого тела Гука и модель вязкой жидкости Ньютона.

Первая модель определяется законом Гука: $\sigma = E\epsilon$ (E —модуль упругости) который не содержит времени. Предполагается, что мгновенно возникшей деформации отвечает мгновенно возникшее напряжение. В дальнейшем гук-

ский элемент будем называть пружиной.

Вторая модель определяется законом течения Ньютона: $\sigma = \eta \dot{\epsilon}$, где η —коэффициент ньютоновской вязкости или просто вязкость. Обычно моделью ньютоновского элемента считают демпфер, состоящий из цилиндра с жидкостью и поршня. При движении поршня жидкость перегоняется из одной полости цилиндра в другую через зазор между поршнем и цилиндром или через отверстие в поршне. В дальнейшем для краткости ньютоновский элемент будем называть демпфером.

Два основных элемента могут быть соединены последовательно или параллельно. При этом предполагается, что соединяющие стержни абсолютно жесткие, т.е. не могут деформироваться.

При последовательном соединении деформации основных элементов складываются, а напряжение на каждом элементе равно общему напряжению на модели:

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2, \quad \sigma = \sigma_1 = \sigma_2$$

При параллельном соединении двух элементов общее напряжение на модели равно сумме напряжений на каждом элементе, а общая деформация модели равна деформации каждого элемента:

$$\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2, \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

Легко заметить, что при произвольном соединении двух однотипных элементов получается модель того же типа, только с другими параметрами.

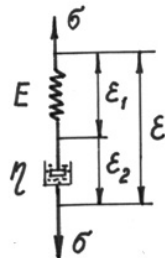


Рис. 2-а

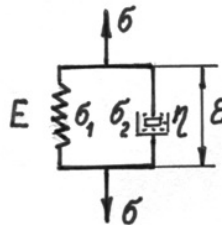


Рис. 2-б

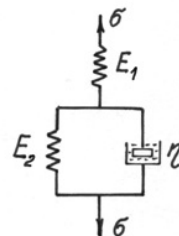


Рис. 2-в

Модель, состоящая из пружины и демпфера, соединенных последовательно, называется моделью Максвелла (рис. 2-а). Обозначим деформацию пружины ϵ_1 , а деформацию демпфера ϵ_2 . Учитывая условия последовательного соединения, уравнения основных элементов можно записать в виде:

$$\frac{\sigma}{E} = \epsilon_1, \quad \frac{\sigma}{\eta} = \dot{\epsilon}_2$$

Общий метод вывода уравнения модели состоит в том, что из уравнения основных элементов с помощью условий соединения исключаются частные деформации и напряжения. Исключим частные деформации ϵ_1 и ϵ_2 и получим уравнение модели Максвелла

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$$

Отметим, что если задано $\sigma(t)$ или $\epsilon(t)$, то уравнение модели представляет собой дифференциальное уравнение для величины, оставшейся неизвестной. Интегрируя его, можно получить интегральное соотношение, например, при заданном $\sigma(t)$:

$$\epsilon = \frac{1}{E}[\sigma(t) + \frac{E}{\eta} \int_0^t \sigma(s) ds]$$

Модель Максвелла имеет мгновенную упругую деформацию и вязкое течение, но не имеет запаздывающей (квазиупругой) деформации.

Модель, состоящая из пружины и демпфера, соединенных параллельно, называется моделью Фойхта (рис. 2-б). Обозначим напряжение в пружине через σ_1 , напряжение в демпфере через σ_2 . На основании условия параллельного соединения уравнение основных элементов можно написать в виде:

$$\sigma_1 = E\epsilon, \quad \sigma_2 = \eta\dot{\epsilon}$$

Сложив эти уравнения, получим уравнение модели Фойхта:

$$(1) \quad \sigma = E\epsilon + \eta\dot{\epsilon}$$

Считаем, что задано $\sigma(t)$. Интегрируя уравнение (1), получим

$$\sigma = \frac{1}{\eta} \int_0^t \exp(-(t-s)\frac{E}{\eta}) \sigma(s) ds$$

При постоянном напряжении σ_0 решение этого уравнения получим в виде

$$\epsilon = \frac{\sigma_0}{E} (1 - \exp(-\frac{E}{\eta}t))$$

Отметим, что модель изображенная на рис. 2-б, при внезапном приложении напряжения не получает мгновенной деформации, а описывает квазиупругую деформацию.

Чтобы включить мгновенную деформацию, изменим модель Фойхта, добавив ещё одну пружину, как показано на рис. 2-в. Деформация пружины, обозначенной индексом 1, от действия напряжения σ будет $\epsilon_1 = \frac{\sigma}{E_1}$ деформация второй пружины ϵ_2 связана с напряжением соотношением (1), в котором при величинах E и ϵ следует поставить индексы 2. Полная деформация $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$; исключая ϵ_1 и ϵ_2 из трех полученных соотношений, найдем

$$\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right)\sigma + \frac{\eta}{E_1 E_2} \dot{\sigma} = \epsilon + \frac{\eta}{E_2} \dot{\epsilon}$$

Положим

$$E_1 = E, \quad \frac{E_1 + E_2}{\eta} = \lambda, \quad \frac{E_2}{\eta} = \mu$$

Очевидно $\lambda > \mu$

В новых обозначениях дифференциальное соотношение, связывающее σ и ϵ , перепишется следующим образом:

$$(2) \quad \dot{\sigma} + \lambda\sigma = E(\dot{\epsilon} + \mu\epsilon)$$

Если нагрузка прикладывается очень быстро, то $\dot{\sigma}$ и $\dot{\epsilon}$ велики и слагаемыми, пропорциональными σ и ϵ , в (2) можно пренебречь и получим $\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon}$

Таким образом, E есть мгновенный модуль, что ясно из рассмотрения модели. При достаточно больших t , наоборот: $\dot{\sigma}$ и $\dot{\epsilon}$ становятся малыми и при $t \rightarrow \infty$, $\sigma = E \frac{\mu}{\lambda} \epsilon$. Величину $E \frac{\mu}{\lambda} = E_\infty$ можно назвать длительным модулем; т.к. $\lambda > \mu$, то $E_\infty < E$. Интегрируя уравнение (2) при заданном $\sigma(t)$, получим:

$$(3) \quad \epsilon = \frac{1}{E}(\sigma(t) + \int_0^t K(t-s)\sigma(s)ds)$$

где $K(t-s) = (\lambda - \mu)\exp(-\mu(t-s))$ - ядро ползучести. При $\sigma = \sigma_0$ из уравнения (3) получим

$$\epsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left(\frac{\lambda}{\mu} - \left(\frac{\lambda - \mu}{\mu} \right) \exp(-\mu t) \right)$$

Тело, которое описывается уравнением (2), называется телом Кельвина. Эта модель качественно объясняет наблюдаемые опытные данные и привлекательна своей простотой и наглядностью. Однако количественное описание опытных данных с помощью уравнения (2) оказывается, как правило, слишком грубым.

Для описания поведения реального материала даже большого количества таких элементов с различными константами пружин и коэффициентами вязкости может оказаться недостаточным.

Конечно, вязкоупругие свойства можно рассматривать и не прибегая к механическим моделям.

Уравнения состояния линейного вязкоупругого нестареющего изотропного тела в изотермических условиях можно записать в виде [6]:

$$(4) \quad e_{ij} = \frac{1}{2G} \left[S_{ij}(t) + \int_0^t K_G(t-s) S_{ij}(s) ds \right]$$

$$\vartheta(t) = \frac{1}{K} \left[\sigma(t) + \int_0^t K_\sigma(t-s) \sigma(s) ds \right]$$

где

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \epsilon_{ij} - \delta_{ij} \epsilon, \quad \mathcal{Z}\epsilon = \vartheta = \epsilon_{kk} \\ S_{ij} &= \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma, \quad \mathcal{Z}\sigma = \sigma_{kk} \end{aligned}$$

Использованы следующие обозначения: e_{ij} , S_{ij} - девиаторы тензоров деформаций и напряжений, $\mathcal{Z}\epsilon = \vartheta$ - объемная деформация, σ - среднее напряжение, δ_{ij} - единичный тензор Кронекера, G , K - сдвиговой и объемный модули упругости, $K_G(t)$, $K_\sigma(t)$ - ядра (функции влияния, функции памяти) сдвиговой и объемной ползучести.

Вязкоупругие свойства среды характеризуются упругими модулями G , K и функциями $K_G(t)$, $K_\sigma(t)$, подлежащими экспериментальному определению. Если функции $K_G(t)$, $K_\sigma(t)$ аппроксимируются конкретными аналитическими выражениями, то за вязкоупругие характеристики принимаются (вместе с G и) входящие в эти выражения параметры. Получаемая при этом система характеристик, очевидно, содержательна лишь в рамках принятой аппроксимации.

В основе уравнений состояния линейного вязкоупругого тела (4) лежат две гипотезы, составляющие содержание принципа суперпозиции Больцмана. Эти гипотезы можно интерпретировать следующим образом:

1. Элементарная деформация образца $\Delta\gamma_i(t)$ в некоторый момент времени t под действием постоянного напряжения $\Delta\tau(s_i)$, приложенного в более ранний момент времени s_i , пропорциональна этому напряжению и некоторой функции от длительности действия напряжения $\Pi(t - s_i)$

$$(5) \quad \Delta\gamma_i(t) = \Pi(t - s_i) \Delta\tau(s_i)$$

2. Деформации в момент времени t , вызванные напряжениями, приложенными в различные моменты времени s_i , ($i = 1, 2, \dots, n$), аддитивны

$$(6) \quad \sum_{i=1}^n \Delta\gamma_i(t) = \sum_{i=1}^n \Pi(t - s_i) \Delta\tau(s_i)$$

Здесь для конкретности рассматривается одномерная ситуация - чистый сдвиг. Этот вид нагружения привлекателен для экспериментального исследования тем, что при нем, во-первых, исключается влияние объемной деформации, которая не имеет места в случае малой деформации сдвига, и, во-вторых, значительно меньше роль краевого эффекта, возникающего вблизи места закрепления образца. Традиционным способом осуществления чистого сдвига является испытание на кручение тонкостенного цилиндрического образца, $\gamma = \epsilon_{12}$ - деформация сдвига, $\tau = \sigma_{12}$ - напряжение сдвига.

Приводимые рассуждения, отличаясь наглядностью, не являются стро-

гими. Для ознакомления со строгим подходом можно рекомендовать работу [7].

При определённых ограничениях на характер закона нагружения $\tau(s)$, переходя в (6) к пределу и интегрируя по времени от $-\infty$ до t , получим

$$(7) \quad \gamma(t) = \int_{-\infty}^t \Pi(t-s) d\tau(s)$$

Интегрирование по частям дает

$$(8) \quad \gamma(t) = \Pi(0)\tau(t) - \int_{-\infty}^t \frac{\partial \Pi(t-s)}{\partial s} \tau(s) ds$$

В уравнениях (7), (8) использовалась гипотеза естественного состояния $\gamma(-\infty) = \tau(-\infty) = 0$, а также ограниченность функции $\Pi(t)$ при $t \rightarrow \infty$

Введя обозначения $\Pi(0) = \frac{1}{G}$, $\frac{\partial \Pi(t-s)}{\partial s} = -\frac{K(t-s)}{G}$, и заменив нижний предел интегрирования на 0 (концепция затухающей памяти), из (8) получим уравнение, являющееся аналогом (7) в применении к случаю чистого кручения

$$(9) \quad \gamma(t) = \frac{1}{G} [\tau(t) + \int_0^t K(t-s) \tau(s) ds]$$

Из (5) следует, что функция $\Pi(t)$ характеризует «отклик» среды на постоянно действующее напряжение, а ее вид определяется формой кривой ползучести, отнесенной к единице напряжения (кривой податливости). По этой причине $\Pi(t)$ называют функцией ползучести. В соответствии с рис. 3 $\Pi(t)$ является положительной монотонно возрастающей ограниченной (в линейной области) функцией. Допущение бесконечной или конечной скорости деформирования в начальный момент нагружения приводит к двум формам функции $\Pi(t)$, изображенным на рис. 3.

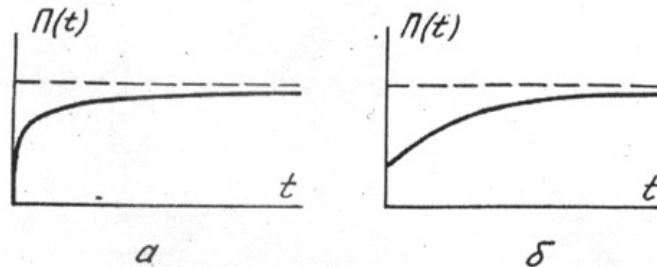


Рис. 3

Ядро ползучести $K(t) = \frac{d\Pi(t)}{dt}$, называемое также функцией ско-

рости ползучести, должно быть положительной монотонно убывающей функцией времени, стремящейся к нулю при $t \rightarrow \infty$. При допущении бесконечной начальной скорости ползучести $K(t)$ имеет особенность при $t \rightarrow 0$, которая должна быть слабой (интегрируемой) из-за требования сходимости интегрального члена в (9). На рис. 4 приведен качественный вид сингулярного и регулярного ядер ползучести.

При $\tau(t) = \tau_0 = const$, что соответствует испытаниям на ползучесть, из (9) следует

$$(10) \quad \gamma(t) = \frac{\tau_0}{G} \left[1 + \int_0^t K(t-s) ds \right]$$

или

$$(11) \quad \frac{G}{\tau_0} \gamma(t) = 1 + \int_0^t K(t-s) ds = f(t)$$

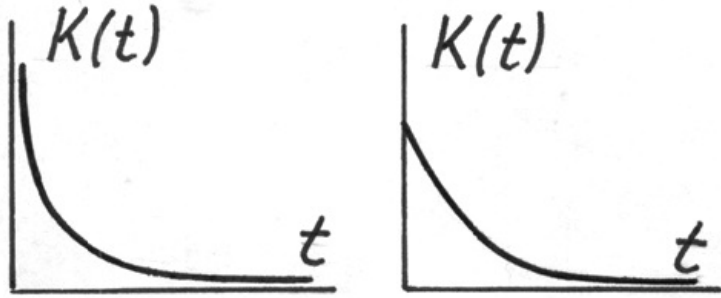


Рис. 4

Последнее выражение дает удобный способ выявления области напряжений, в которой допустимо использование линейной теории вязкоупругости. Необходимо располагать лишь семейством экспериментальных кривых ползучести при различных напряжениях. В линейной области семейство экспериментальных кривых, перестроенных в координатах $\gamma/\tau \sim t$, должно образовывать единую зависимость $f(t)$, точнее – расхождение между индивидуальными кривыми податливости $\gamma/\tau \sim t$ не должно превышать естественного разброса экспериментальных данных.

Другой возможный способ проверки применимости линейной теории базируется на непосредственном использовании исходных допущений принципа суперпозиции. При этом удобно проводить анализ данных, получаемых при ступенчатых нагружениях по усложненным программам с чередованием ступеней повышения и понижения нагрузки. Такой способ можно использовать и в нелинейном случае.

Часто оказывается эффективным способ, когда данные испытаний в каком-то одном режиме нагружения, например, $\frac{d\tau}{dt} = const$, сопоставляется с теоретической зависимостью, вытекающей для этого режима из (9), при использовании численных значений вязкоупругих характеристик, найденных из независимого эксперимента, например, в режиме $\tau = const$. На точность данного способа, очевидно, влияют погрешности, связанные с выбором аналитической формы ядра ползучести и определением входящих в него параметров. Этот способ принят в настоящей работе.

Продифференцировав (11) по t , получим уже известный результат

$$(12) \quad K(t) = \frac{df}{dt} = \frac{G}{\tau_0} \frac{d\gamma(t)}{dt}$$

Следовательно, для нахождения ядра ползучести достаточно располагать экспериментальной кривой податливости в графической или табличной форме. Аналитическое представление ядра ползучести не является в общем случае необходимым.

Тем не менее, дальнейшее развитие уравнений состояния наследственной теории вязкоупругости проходило по пути усложнений ядер ползучести. Получило признание и прошло серьезную экспериментальную проверку значительное число сингулярных и регулярных форм аналитического представления ядер. Прежде всего, отметим наиболее простое степенное ядро

$$(13) \quad K(t-s) = A(t-s)^\alpha, \quad -1 < \alpha < 0$$

В этом случае кривая ползучести определяется выражением

$$(14) \quad \gamma(t) = \frac{\tau_0}{G} + \frac{\tau_0 A}{G(\alpha+1)} t^{\alpha+1}$$

Для деформации ползучести $\gamma^{(c)}(t)$ получаем

$$\gamma^{(c)}(t) = \gamma(t) - \frac{\tau_0}{G} = \frac{\tau_0 A}{G(\alpha+1)} t^{\alpha+1}$$

В координатах $lg(\gamma^{(c)}(t)) - lg(t)$ последняя зависимость дает уравнение прямой линии

$$(16) \quad lg\gamma^{(c)}(t) = (\alpha+1)lg(t) + lg\frac{\tau_0 A}{G(\alpha+1)}$$

Это создает ощутимые удобства при определении численных значений вязкоупругих характеристик A и α по экспериментальным данным.

Для режима постоянной скорости нагружения $\frac{d\tau}{dt} = const$ из (9) получаем

$$(17) \quad \gamma(t) = \frac{c}{G} \left[t + \frac{A}{(\alpha+1)(\alpha+2)} t^{\alpha+2} \right], \quad \tau(t) = ct$$

Формулы (17) дают параметрическое представление диаграммы $\tau \sim \gamma$, являющейся аналогом диаграммы одноосного растяжения $\sigma \sim \epsilon$.

Применимость степенного ядра для описания деформационных свойств подтверждена многочисленными экспериментальными исследованиями, выполненными на образцах из различных полимеров. Длительность отдельных опытов в режиме ползучести превышала 10^5 час. Формально, однако, степенное ядро при $t \rightarrow \infty$ дает неограниченный рост деформации ползучести $\gamma^{(c)}(t) \rightarrow \infty$. Хорошее согласие степенного ядра с экспериментом объясняется тем, что при получающихся значениях параметров A и α отмеченное свойство ядра проявляется лишь при чрезвычайно больших временах, не имеющих практического значения.

Ограниченную (даже с формальной точки зрения) ползучесть обеспечивает другое сингулярное ядро, называемое ядром А.Р.Ржаницина,

$$(18) \quad K(t-s) = A \exp(-\beta(t-s))(t-s)^\alpha, \quad -1 < \alpha < 0, \quad \beta > 0$$

Большой универсальностью обладает ядро в виде дробно-экспоненциальной функции Ю.Н. Работнова

$$(19) \quad K(t-s) = \mathfrak{D}_\alpha(\beta, t-s) = (t-s)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n (t-s)^{n(\alpha+1)}}{\Gamma[(n+1)(\alpha+1)]}$$

где Γ —гамма-функция.

Регулярные ядра, обеспечивающие согласие с экспериментом, обычно принимают в виде суммы экспонент

$$(20) \quad K(t-s) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{\eta_i} \exp\left(-\frac{t-s}{\eta_i}\right)$$

где η_i - параметры, имеющие размерность времени и называемые временами релаксации.

Ядро (20) называется ядром с дискретным спектром времен релаксации. Более общим является ядро с непрерывным спектром:

$$(21) \quad K(t-s) = \int_0^{\infty} \frac{A(\eta)}{\eta} \exp\left(-\frac{t-s}{\eta}\right) d\eta$$

Поскольку времена η удобно записывать по логарифмической шкале, то данное ядро обычно записывается в форме

$$K(t-s) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\eta) \exp\left(-\frac{t-s}{\eta}\right) d \ln(\eta)$$

Экспериментальная установка и программа испытания

Схема установки для проведения испытаний тонкостенных трубчатых образцов на кручение представлена на рис. 5. Образец 1 (рис. 5а,в) левым концом устанавливается в неподвижный зажим. На правом конце образца закрепляется диск 2 диаметром D , установленный на подшипниковой опоре 3, так что крутящий момент, приложенный к диску, передается на образец. Этот момент создается грузом 4 (весом) и передается

на диск 2 через систему блоков 5 с помощью гибкой нити 6, как показано на рис. 5б. Деформации образца измеряются (см. пособие [8]) по мостовой схеме двумя проволочными тензорезисторами 7, установленными под углом $+45^\circ$ по отношению к оси образца. Использование двух тензорезисторов позволяет не только удвоить измеряемую величину основного сигнала, создаваемого деформированием каждого тензорезистора вдоль его оси, но и взаимно скомпенсировать «паразитные» сигналы, возникающие из-за некоторого деформирования тензорезисторов в ортогональном к оси направлении. Возможность указанной компенсации обусловлена тем, что один из тензорезисторов при закручивании образца подвергается растяжению вдоль своей оси и сжатию в поперечном направлении, в то время как для второго – направления растяжения и сжатия меняются местами.

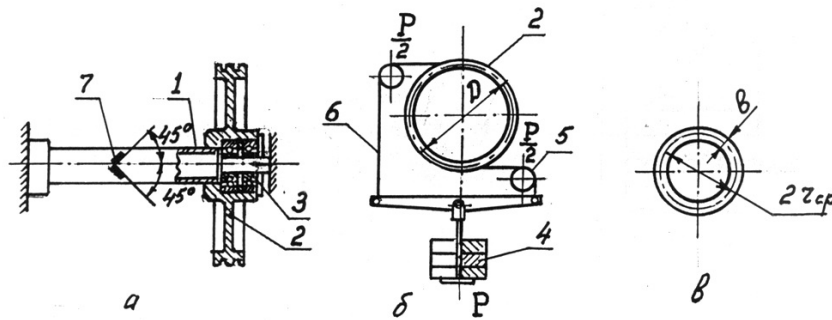


Рис. 5

Для определения связи между нагрузкой P и касательным напряжением τ рассмотрим напряженное состояние трубчатого образца. Для определения внутренних сил проведем мысленно сечение, перпендикулярное к оси трубы (рис. 5в), и, отбросив одну часть ее, рассмотрим равновесие оставшейся части. Так как на оставшемся торце внешние силы приводятся к крутящему моменту, то и внутренние силы в сечении должны приводиться к моменту той же величины с вектором, направленным по оси трубы. Такой момент может быть создан напряжениями, направления которых лежат в плоскости поперечного сечения и направлены по касательным к окружностям с общим центром на оси трубы, т.е. касательными напряжениями.

Вследствие малости толщины трубы пренебрежем изменением напряжения τ и деформации γ по толщине трубы

$$\tau = const, \gamma = const$$

Внешний крутящий момент

$$M_{кр}^{внеш} = \frac{P}{2}R + \frac{P}{2}R = \frac{P}{2}D_{диска}$$

Внутренний крутящий момент

$$M_{\text{кр}}^{\text{внутр}} = \int_{F_0} r_{\text{ср}} \tau dF = 2\pi r_{\text{ср}} b r_{\text{ср}} \tau = \tau 2\pi r_{\text{ср}}^2 b$$

где $b = (d_{\text{нар}} - d_{\text{вн}})/2$ - толщина образца, $r_{\text{ср}} = (r_{\text{нар}} + r_{\text{вн}})/2$.

Отсюда получаем зависимость пересчета нагрузки P в напряжение сдвига τ

$$(22) \quad \tau = P \frac{D_{\text{диска}}}{4\pi r_{\text{ср}}^2 b}$$

Обработка поступающих с тензорезисторов на компьютер электрических сигналов автоматизирована на основе современного программного комплекса LabVIEW, разработанного совместно Международным лазерным центром МГУ и ведущей в данной области корпорацией National Instruments. В результате на монитор непосредственно выводятся зависимости деформация-время в графической и цифровой формах.

Испытание тонкостенного цилиндрического образца проводится в двух режимах – ползучести $\tau = \text{const}$ и постоянной скорости нагружения $\frac{d\tau}{dt} = \text{const}$. В свою очередь, режим ползучести разбивается на 3 участка. На первом участке $0 \leq t < t_1$ нагрузка выдерживается постоянной. В момент времени t_1 нагрузка увеличивается до P_1 ($P_1 > P_0$) для перехода на второй участок ползучести $t_1 \leq t < T_2$. Наконец, в момент времени t_2 нагрузка полностью снимается $P_2 = 0$ ($P_2 < P_0$) и наступает 3-й участок деформирования в режиме ползучести $t \geq t_2$ – участок обратной ползучести (рис. 6). В целом закон изменения напряжения в образце при испытании в режиме ползучести имеет вид

$$(23) \quad \tau(t) = \tau_0[h(t) - h(t - t_1)] + \tau_1[h(t - t_1) - h(t - t_2)]$$

где τ_0, τ_1 – напряжения, вызываемые соответственно нагрузками P_0, P_1 . Конкретные значения P_0, P_1 , а также t_1 и t_2 задаются преподавателем.

Испытание в режиме постоянной скорости нагружения (рис. 7) также разделяется на участок активного нагружения $\tau = ct$ ($0 \leq t < t_m$) до некоторого максимального напряжения τ_m в момент времени t_m и участок разгрузки $\tau = -ct + 2ct_m$ ($t_m \leq t \leq 2t_m$). В координатах $\tau - \gamma$ получаемая экспериментальная кривая имеет характерный петлеобразный вид и называется петлей гистерезиса. Под петлей гистерезиса понимают кривую зависимости напряжения от деформации, соответствующую нагружению и последующей разгрузке.

Для определения «мгновенного» модуля сдвига G проводится отдельный эксперимент. Применяется метод вынужденных резонансных колебаний при высоких частотах нагружения с характерными временами $\sim 10^{-3}$ сек. Для измерений используется промышленная установка ИЧЗ-7Ф (измеритель частоты и затухания механических колебаний). Основ-

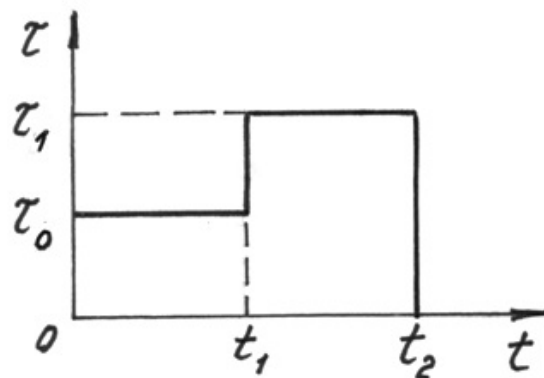


Рис. 6

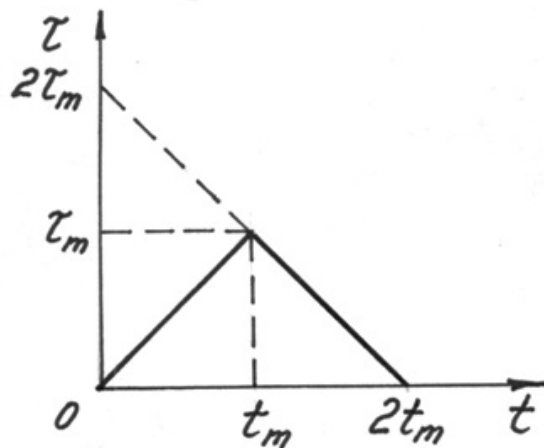


Рис. 7

ными элементами установки являются электромеханические возбудитель и приемник колебаний, устройство для изменения частоты колебаний, генерируемых возбудителем, и измеритель переменного электрического тока, индуцируемого в обмотке приемника. Призматический образец с наклеенными на его концах асимметрично продольной оси легкими металлическими накладками (полимеры являются диэлектриками и немагнитны) закрепляется в среднем по длине сечении. Асимметричное расположение металлических накладок позволяет генерировать в образце крутильные колебания под воздействием переменного электромагнитного поля возбудителя, установленного на одном из концов образца. Величина электрического тока, который возникает в обмотке приемника,

установленного на другом конце образца, определяется амплитудой колебаний и, очевидно, максимальна при резонансной частоте. Варьируя частоту колебаний возбуждателя вращением ручки перестройки частот, резонансную частоту определяют по максимальному отклонению стрелки измерителя тока в приемнике. Для вычисления модуля сдвига G по известной резонансной частоте может быть использована следующая хорошо себя зарекомендовавшая на практике формула [9]

$$(24) \quad G = 4,08 * 10^{-1} \frac{(h/b + b/h)Pl}{[4h/b - 2,52(h/b)^2]hb} f_0^2, \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}$$

где f_0 - резонансная частота в Гц, h, b, l - высота, ширина и длина образца в м; P - вес образца в Н. Числовой коэффициент $(4.08 * 10^{-1})$ в формуле является размерным $(\frac{\text{сек}^2}{\text{м}})$.

Порядок выполнения работы

1. Приступить к испытанию трубчатого образца в режиме ползучести по заданному формулой (23) закону изменения напряжений. По окончании испытания выполнить на этом же образце эксперимент в режиме постоянной скорости нагружения-разгрузки.

2. Вычислить по формуле (22) напряжение в образце τ по известной величине приложенной нагрузки P .

3. Измерить частоту собственных колебаний призматического образца на приборе ИЧЗ-7Ф и вычислить по формуле (24) динамический модуль сдвига G полиметилметакрилата (его величина имеет порядок 1500 МПа).

4. Экспериментальную кривую ползучести на участке $0 \leq t < t_1$ перестроить в координатах $lg\gamma^{(c)}(t) \sim lg(t)$ и найти с помощью формулы (16) вязкоупругие характеристики A и α . При этом построении рекомендуется использовать экспериментальные деформации ползучести $\gamma(t)$, относящиеся к временам 5, 15, 30 сек, 1, 2, 5, 15, 30 мин. Это обеспечит практически равномерное распределение точек на графике по оси $lg(t)$.

5. Исходя из формулы (9) при использовании (13), найти аналитические выражения для кривых ползучести на участках $t_1 \leq t < t_2$ и $t_2 \leq t$, нанести на экспериментальный график $\gamma \sim t$ теоретические кривые ползучести на всех трех участках (вплоть до $t = 3t_1$), используя найденные значения параметров A и α , а также модуля упругости G .

6. Исходя из формулы (9) при использовании (13), найти аналитические выражения кривых, полученных при испытании трубчатого образца в режиме постоянной скорости нагружения $\tau = ct$ ($0 \leq t \leq t_m$) и разгрузки $\tau = -ct + 2ct_m$ ($t_m \leq t \leq 2t_m$), где $c = const$. Построить экспериментальную и теоретическую (используя (17)) кривые $\tau \sim \gamma$ при нагрузке и разгрузке.

7. Обсудить возможность использования линейной вязкоупругой мо-

дели для описания деформационных свойств полиметилметакрилата, сформулировать выводы по работе.

Литература

1. Кравчук А.С., Майборода В.П., Уржумцев Ю.С. Механика полимерных и композиционных материалов. М.: Наука, 1985.- 303 с.
2. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.- 712 с.
3. Локощенко А.М., Пушкарь Е.А. Основы теории ползучести: Учебное пособие. – М.: МГИУ, 2007.- 132с.
4. Бартенев Г.М., Зеленев Ю.В. Физика и механика полимеров. М.: Высшая школа, 1983.- 391с.
5. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.- 384 с.
6. Огибалов П.М., Ломакин В.А., Кишкин Б.П. Механика полимеров. М.: Изд-во МГУ, 1975.- 528 с.
7. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970.- 280 с.
8. Лабораторный практикум по механике деформируемых твердых тел. М.: Изд. МГУ, 1987. 166 с.
9. Уржумцев Ю.С., Майборода В.П. Технические средства и методы определения прочностных характеристик конструкций из полимеров. М.: Машиностроение, 1984.- 168 с.