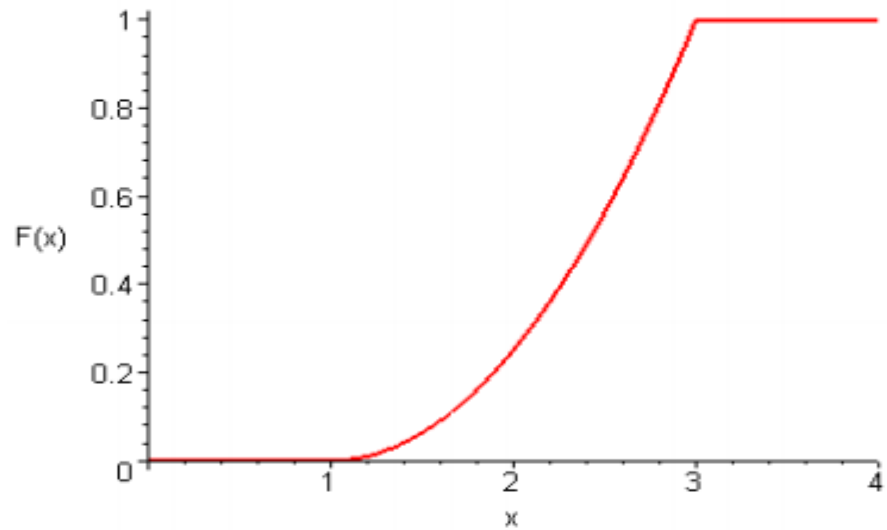
Случайная величина X называется непрерывной, если ее функция распределения F(x) – непрерывна на всей числовой оси.

Пример.

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \ -\infty < x \le 1,\\ \frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}, & при \ 1 < x \le 3,\\ 1, & при \ 3 < x < +\infty.\end{cases}$$



1. График расположен в

полосе, ограниченной прямыми y=0, y=1.

2.При возрастании x в интервале (1;3), в котором заключены все возможные значения случайной величины, график «растет».

3.При x≤1 ординаты графика равны нулю; при x ≥3

ординаты графика равны 1. (см. свойства функции

распределения).

Найдем вероятность попадания случайной величины X в интервал: P (2 <x<3) =F(3) −F(2) =1-1/4=3/4 .

Интегральная функция распределения непрерывной случайной величины.

Если **X** - случайная величина, то функция ***F*(x)** - ***интегральная функция распределения вероятностей***, или просто функция распределения случайной величины определяет вероятность **P** того, что случайная величина принимает значение, меньше ***x***, т.е. $F(x) = P(X < x)$

Функция распределения полностью характеризует случайную величину и является одной из форм закона распределения.

Из определения следует, что функция распределения любой случайной величины обладает следующими свойствами:

1. Интегральная функция распределения принимает значения от 0 до 1.

2. $F(x)$ - неубывающая функция, то есть $F(x_2) \geq F(x_1)$, если $x_2 > x_1$.

3. Вероятность того, что случайная величины X примет значение, заключенное в интервале (a, b) равна приращению интегральной функции распределения на этом интервале:

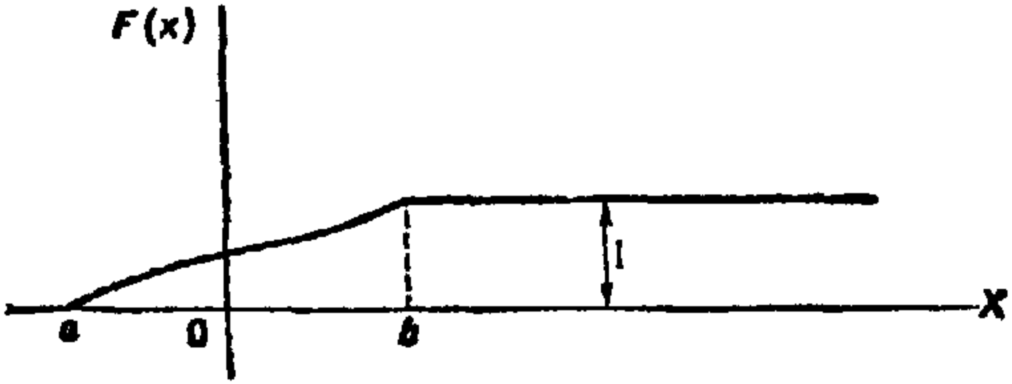
$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

4. Если все значения непрерывной случайной величины принадлежат некоторому промежутку от a до b, то:

$F(x) = 0$, если $x \le a$, $F(x) = 1$, если $x \ge b$

График интегральной функции распределения непрерывной случайной величины.

1. График расположен в полосе, ограниченной Прямыми y=0, y=1.



2. При возрастании x в интервале (a;b), в котором заключены все возможные значения случайной величины, график «растет».

3. При x≤a ординаты графика равны нулю; при x ≥b ординаты графика равны 1. (см. Свойства функции распределения).

Плотность распределения

Плотность распределения непрерывной (дифференциальная функция распределения) случайной величины : $f(x) = F'(x)$

Следовательно, функция распределения **F(x)** выражается через плотность распределения:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = P(-\infty < X < x)$$

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащие интервалу (a, b) равна определенному интегралу от дифференциальной функции, взятому в пределах от a до b:

$$P(a \le X \le b) = \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Свойства и график плотности распределения

График $f(x)$ называют также **законом распределения** или **кривой распределения**.

Свойства $f(x)$ **:**

1. $f(x) \geq 0$

2. $\int_a^b f(x)dx = 1$, если все возможные значения X принадлежат интервалу (a, b)

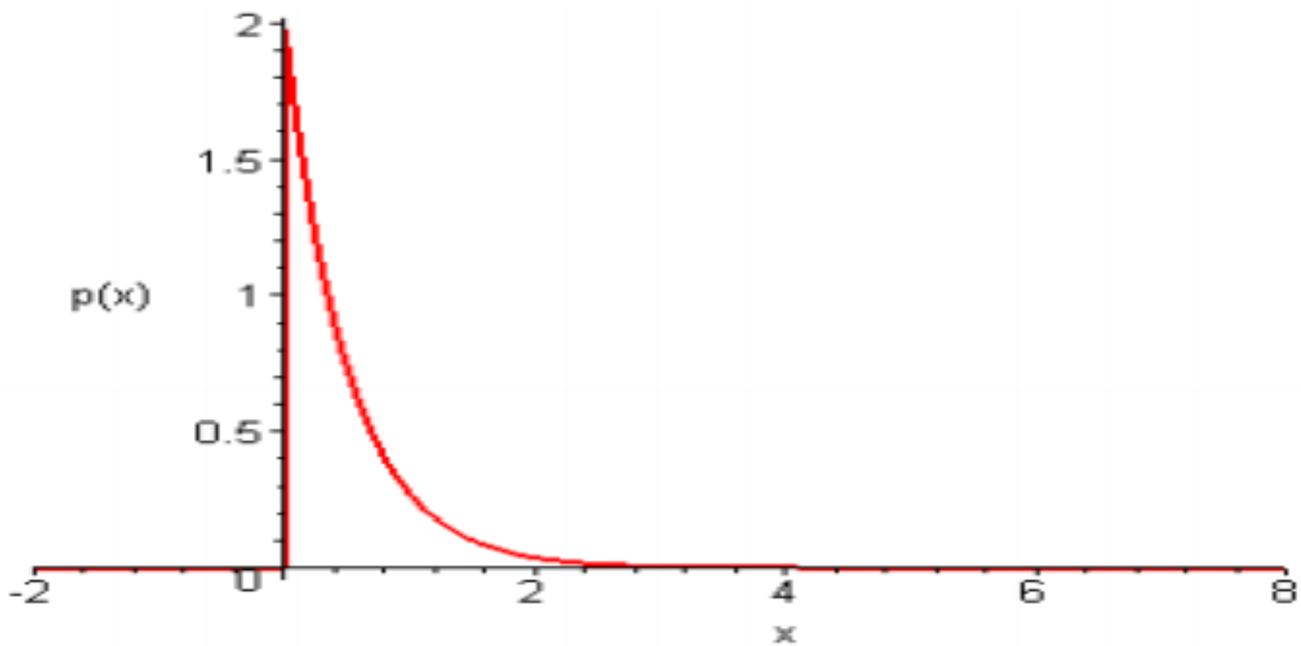
3. Условие «нормировки» $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Пример.

$$F(x)=\begin{cases} 0,\ x<0, \\ 1-e^{-2x},\ x\ge 0. \end{cases}$$

Найдем плотность распределения $p(x)$:

$$p(x)=F'(x)=\begin{cases} 0,\ x<0, \\ 2e^{-2x},\ x\ge 0. \end{cases}$$



Задание. *Случайная величина X задана дифференциальной функцией распределения.*

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\le\pi, \\ -\cos x \text{ при } \pi<x\le\frac{3}{2}\pi, \\ 0 \text{ при } x>\frac{3}{2}\pi. \end{cases}$$

1) *Определить вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left[\pi,\frac{5}{4}\pi\right]$.*

Решение.

Вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left[\pi,\frac{5}{4}\pi\right]$ равна

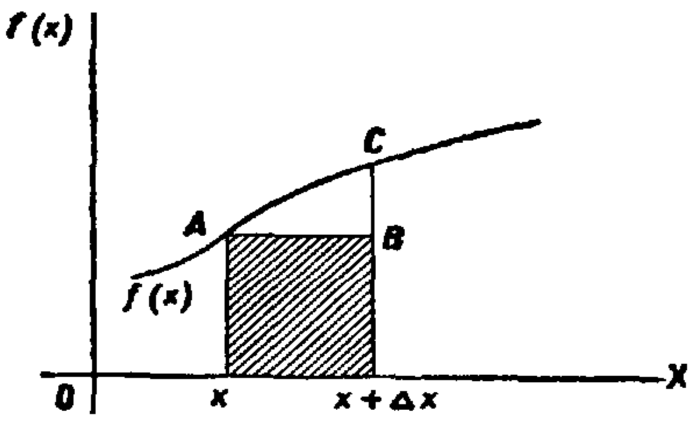
$$P\left(\pi\le X\le\frac{5}{4}\pi\right)=\int_{\pi}^{5/4\pi} f(x)dx=\int_{\pi}^{5/4\pi}-\cos x dx=-\sin x\Big|_{\pi}^{5/4\pi}=-\sin(5/4\pi)+\sin(\pi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0,707.$$

Вероятностный смысл плотности распределения

$$f(x) = F'(x)$$ или $$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

или $$F(x+\Delta x) - F(x) \simeq f(x)\,\Delta x$$

Вероятностный смысл этого равенства таков: вероятность того, что случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу $(x, x+\Delta x)$, приближенно равна (с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно Δx) произведению плотности вероятности в точке x на длину интервала Δx.



Числовые характеристики непрерывной случайной величины

1. Математическое ожидание.

X – непрерывная случайная величина, $x \in [a;b]$, $f(x)$- плотность.

Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частичных отрезков длиной $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ и в каждом выберем точку x_i . Найдем математическое ожидание по аналогии с дискретной величиной: $\sum x_i f(x_i)\Delta x_i$. Переходя к пределу при $\Delta x_i \to 0$, получим $M(X)=\int_a^b xf(x)\,dx.$

Если возможные значения принадлежат всей оси Ox, то

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx.$$

2. Дисперсия.

Дисперсией непрерывной случайной величины называют математическое ожидание квадрата ее отклонения.

Если возможные значения X принадлежат отрезку $[a, b]$, то

$$D(X)=\int_{a}^{b}[x-M(X)]^2 f(x)\,dx;$$

если возможные значения принадлежат всей оси x, то

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^2 f(x)\,dx.$$

$$D(X)=\int_{a}^{b}x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2,$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2.$$

3. Среднее квадратическое отклонение.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Пример. Найти математическое ожидание и дисперсию непрерывной случайной величины, заданной плотностью

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{ï ðè } x\le 1, \\ \dfrac{x-1}{2}, & \text{ï ðè } 1<x\le 3, \\ 0, & \text{ï ðè } x>3. \end{cases}$$

$$MX=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)x\,dx=\frac{1}{2}\int_{1}^{3}(x-1)\,x\,dx=\frac{1}{2}\int_{1}^{3}\left(x^2-x\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_1^3=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}3^3-\frac{1}{2}3^2\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(9-\frac{9}{2}+\frac{1}{6}\right)=\frac{7}{3}.$$

$$DX=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^2dx-(MX)^2=\frac{1}{2}\int_{1}^{3}(x-1)\,x^2dx-\frac{49}{9}=\frac{1}{2}\int_{1}^{3}\left(x^3-x^2\right)dx-\frac{49}{9}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_1^3-\frac{49}{9}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}3^4-\frac{1}{3}3^3\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)-\frac{49}{9}=\frac{2}{9}.$$

Законы распределения непрерывной случайной величины

1. Равномерное распределение

Плотность распределения сохраняет постоянное значение на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины:

$$f(x)=\begin{cases} const, \text{ при } a \le x \le b \\ 0, \text{ при } x < a, x > b \end{cases}.$$

Для того чтобы случайная величина подчинялась закону равномерного распределения необходимо, чтобы ее значения лежали внутри некоторого определенного интервала, и внутри этого интервала значения этой случайной величины были бы равновероятны.

Найдем значение, которое принимает случайная величина в интервале [a;b]. Из условия нормировки следует, что

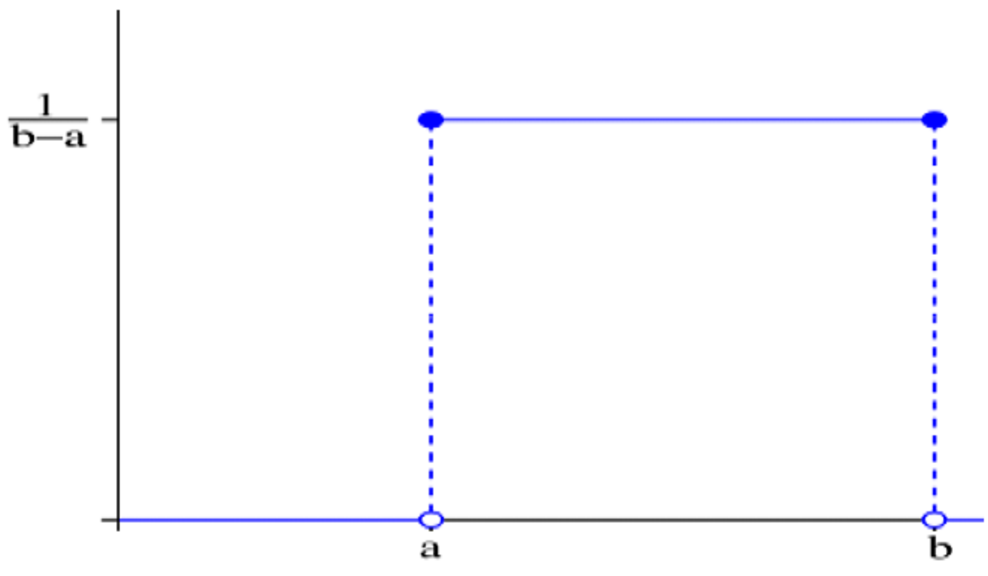
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a) = 1$$

Откуда $f(x) = c = \dfrac{1}{b-a}$.

Равномерное распределение в общем виде:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, x\in[a,b]\\ 0, x\notin[a,b]\end{cases}$$

Непрерывное равномерное распределение характеризуется тем, что вероятность любого интервала зависит только от его длины.



Вероятность попадания равномерно распределенной случайной величины в интервале [α;β]

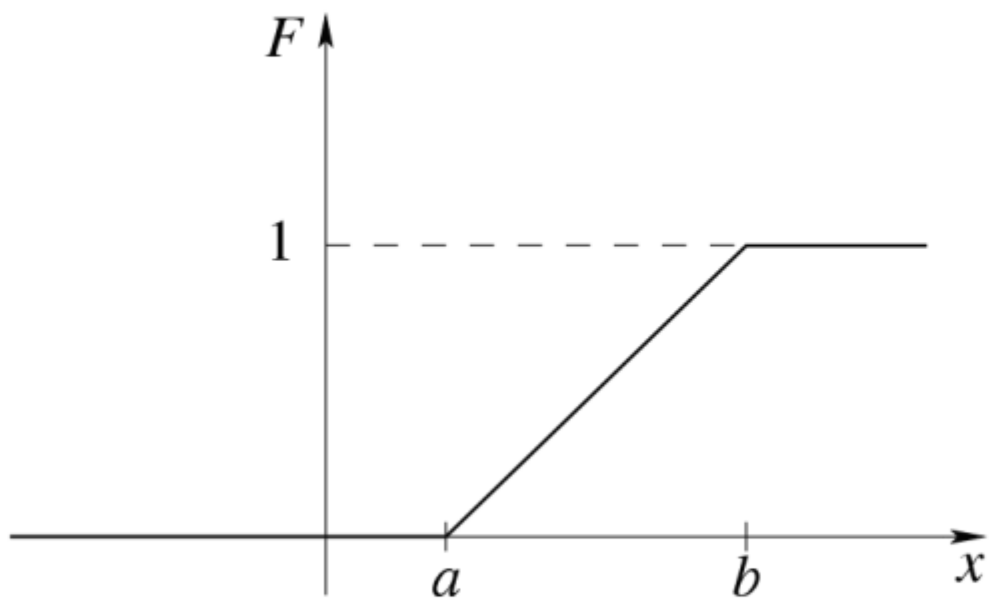
$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a}dx = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

$$P(\alpha < x < \beta) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$$

Замечание. Равномерное распределение непрерывный аналог дискретного распределения вероятностей для опытов с равновероятными исходами.

Вид и график интегральной функции распределения равномерной случайной величины

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a},\ a\le x\le b\\ 1,\ x>b\end{cases}$$



Пример. Автобусы некоторого маршрута идут с интервалом 5 минут. Найти вероятность того, что пришедшему на остановку пассажиру придется ожидать автобуса не более 2 минут.

Решение

Время ожидания является случайной величиной, равномерно распределенной в интервале [0, 5].

$$f(x)=\frac{1}{5},\ p(0\le x\le 2)=\frac{2}{5}=0.4$$

Числовые характеристики равномерного распределения

$$M(x)=\int_a^b x\cdot f(x)dx=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\cdot dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2\cdot(b-a)}=\frac{b+a}{2}$$

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-(M(x))^2=\int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}dx-(M(x))^2=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx-(M(x))^2;$$

$$D(x)=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_a^b-[M(x)]^2=\frac{b^3-a^3}{3\cdot(b-a)}-\left[\frac{b+a}{2}\right]^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma=\sqrt{D(x)}=\sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}=\frac{b-a}{2\cdot\sqrt{3}};$$

Пример. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего деления. Найти вероятность того, что ошибка отсчета: а) превысит значение 0,04; б) меньше 0,04.

Решение.

Ошибку округления отсчета можно рассматривать как случайную величину X, которая распределена равномерно в интервале между двумя соседними делениями. Плотность равномерного распределения по формуле равна:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

где (b – a) – длина интервала, в котором заключены возможные значения X. Вне этого интервала f (x) = 0.

В рассматриваемой задаче длина интервала, в котором заключены возможные значения X, равна 0,2. Поэтому плотность распределения вероятностей равна:

$$f(x) = \frac{1}{0,2} = 5$$

Тогда ошибка отсчета превысит значение 0,04, если она будет заключена в интервале (0,04; 0,2):

$$P(a < X < b) = \int_{0,04}^{0,2} 5dx = 5x /_{0,04}^{0,2} = 1 - 0,2 = 0,8$$

Ошибка отсчета меньше 0,04 будет заключена в интервале (0; 0,04) с вероятностью:

$$P(a < X < b) = \int_{0}^{0,04} 5dx = 5x /_{0}^{0,04} = 0,2$$

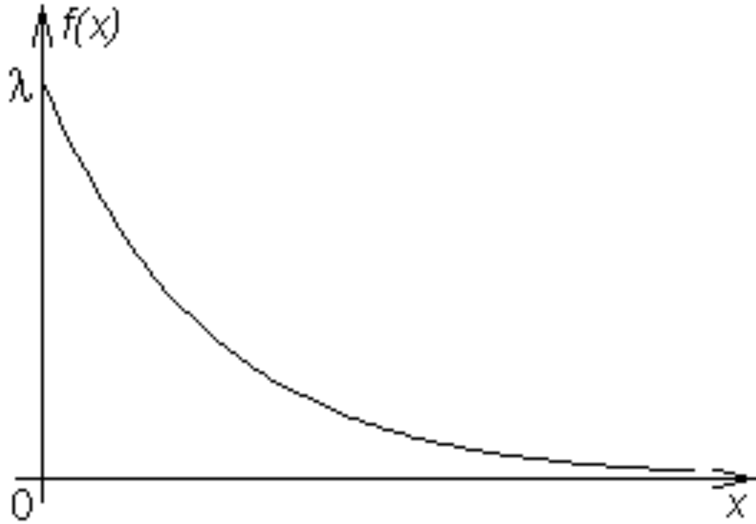
2. Показательное (экспоненциальное) распределение.

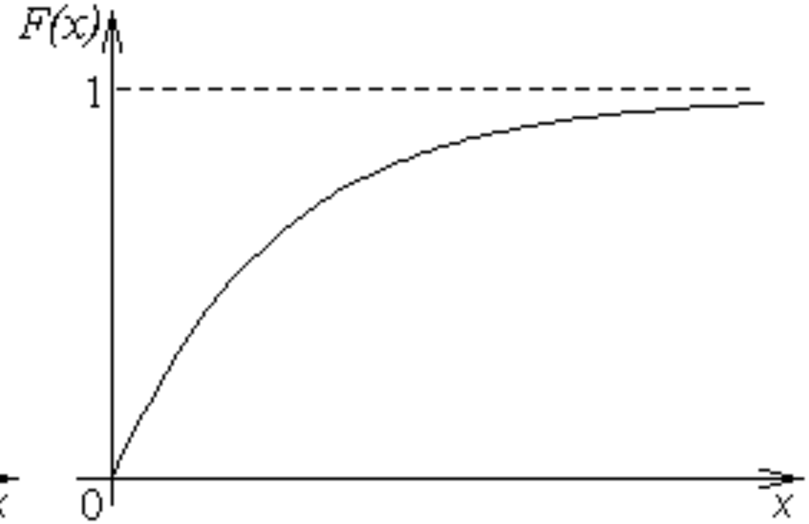
$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x\geqslant 0,\end{cases}$$

где λ – постоянная положительная величина.

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\lambda\int_{0}^{x} e^{-\lambda x}\,dx=1-e^{-\lambda x}.$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0,\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x\geqslant 0.\end{cases}$$





Экспоненциальное распределение является одним из основных распределений, используемых в теории надежности.
Например, продолжительность безотказной работы многих технических устройств, а также время задержки вылета самолѐта по вине технических служб аэропорта.

Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал.

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

Математическое ожидание и дисперсия

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} d = \left\{ \begin{matrix} u = x; & e^{-\lambda x}dx = dv; \\ du = dx; & -\dfrac{e^{-\lambda x}}{\lambda} = v; \end{matrix} \right\} =$$

$$= \lambda \left(-\frac{xe^{-\lambda x}}{\lambda} \Bigg|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} dx \right) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Следовательно, окончательно имеем

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}; \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma_x = \frac{1}{\lambda}.$$

3. Нормальное распределение

Интегральная и дифференциальная функции распределения. Вероятность попадания в заданный интервал.

Одним из наиболее часто встречающихся распределений является нормальное распределение. Оно играет большую роль в теории вероятностей и занимает среди других распределений особое положение. Нормальный закон распределения является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при часто встречающихся аналогичных условиях.

Если предоставляется возможность рассматривать некоторую случайную величину как сумму достаточно большого числа других случайных величин, то данная случайная величина обычно подчиняется нормальному закону распределения. Суммируемые случайные величины могут подчиняться каким угодно распределениям, но при этом должно выполняться условие их независимости (или слабой зависимости). При соблюдении некоторых не очень жестких условий указанная сумма случайных величин подчиняется приближенно нормальному закону распределения и тем точнее, чем большее количество величин суммируется.

Ни одна из суммируемых случайных величин не должна резко отличаться от других, т. е. каждая из них должна играть в общей сумме примерно одинаковую роль и не иметь исключительно большую по сравнению с другими величинами дисперсию.

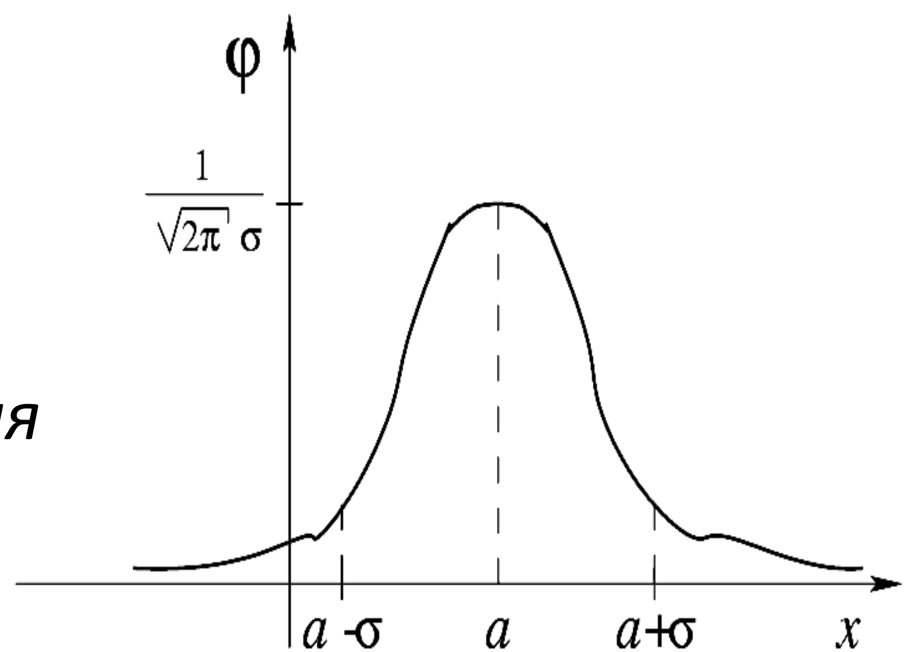
Для примера рассмотрим изготовление некоторой детали на станке-автомате. Размеры изготовленных деталей несколько отличаются от требуемых. Это отклонение размеров от стандарта вызывается различными причинами, которые более или менее независимы друг от друга. К ним могут относиться: неравномерный режим обработки детали; неоднородность обрабатываемого материала; неточность установки заготовки в станке; износ режущего инструмента и деталей станков; упругие деформаций узлов станка; состояние микроклимата в цехе; колебание напряжения в электросети и т. д. Каждая из перечисленных и подобных им причин влияет на отклонение размера изготовляемой детали от стандарта. Таким образом, общее отклонение размера, фиксируемое измерительным прибором, является суммой большего числа отклонений, обусловленных различными причинами. Если ни одна из этих причин не является доминирующей, то суммарное отклонение является случайной величиной, имеющей нормальный закон распределения.

Нормальное распределение (гауссовское) определяется ***функцией плотности*** *следующим образом*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Нормальное распределение зависит от двух параметров: математического ожидания **а** и среднего квадратического отклонения **σ**

График плотности - *нормальная кривая* или ***кривая Гаусса***



1. Очевидно, функция определена на всей оси x.

2. При всех значениях x функция принимает положительные значения, т. е. нормальная кривая расположена над осью Ox.

3 Предел функции при неограниченном возрастании x (по абсолютной величине) равен нулю: $\lim\limits_{|x|\to\infty} y=0$, т. е. ось Ox служит горизонтальной асимптотой графика.

4. Исследуем функцию на экстремум. Найдем первую производную:

$$y' = -\frac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}.$$

Легко видеть, что $y'=0$ при $x=a$, $y'>0$ при $x<a$, $y'<0$ при $x>a$.

Следовательно, при $x=a$ функция имеет максимум, равный $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$.

5. Разность $x-a$ содержится в аналитическом выражении функции в квадрате, т. е. график функции симметричен относительно прямой $x=a$.

6. Исследуем функцию на точки перегиба. Найдем вторую производную:

$$y'' = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}\left[1-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right].$$

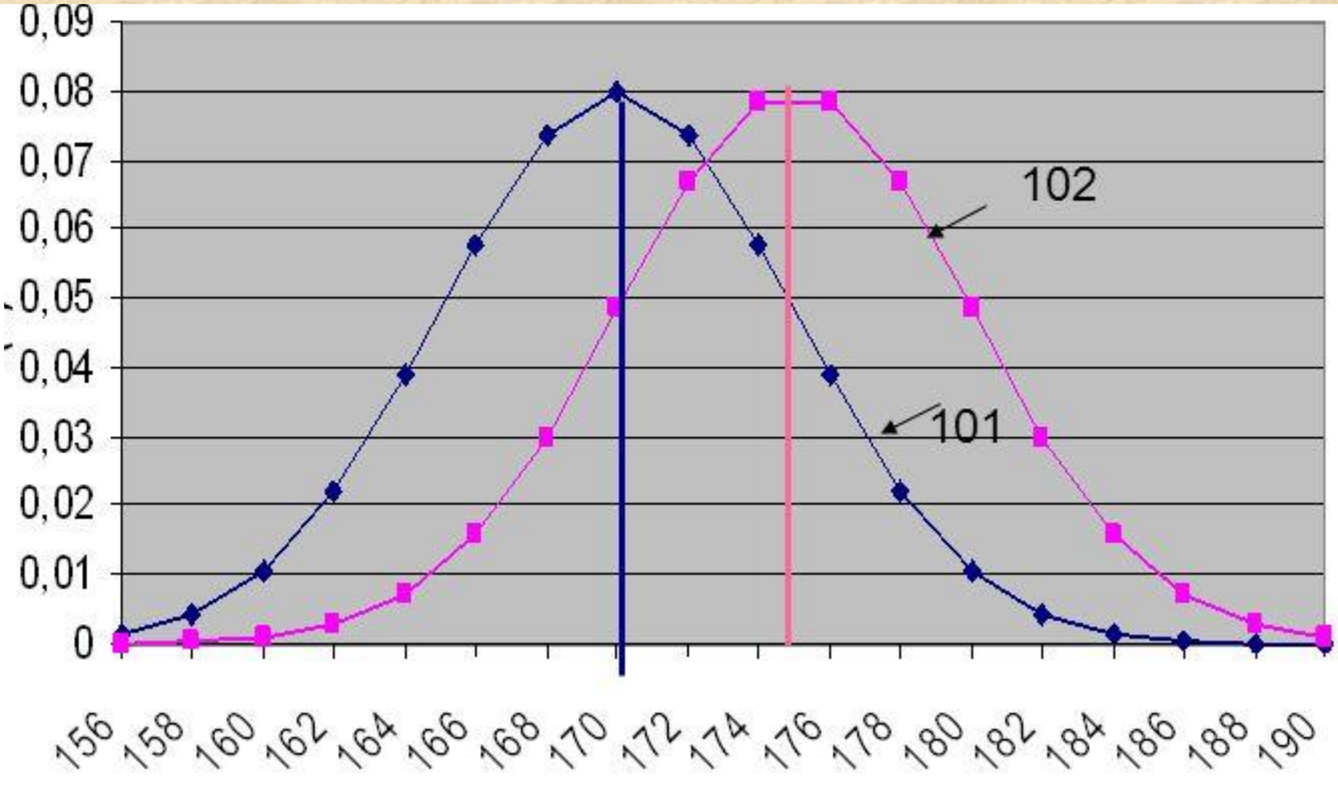
Легко видеть, что при $x=a+\sigma$ и $x=a-\sigma$ вторая производная равна нулю, а при переходе через эти точки она меняет знак (в обеих этих точках значение функции равно $1/(\sigma\sqrt{2\pi}e)$). Таким образом, точки графика $(a-\sigma, 1/(\sigma\sqrt{2\pi}e))$ и $(a+\sigma, 1/(\sigma\sqrt{2\pi}e))$ являются точками перегиба.

- **Параметр μ характеризует математическое ожидание (среднее арифметическое) случайной величины, являясь центром распределения и наиболее вероятным значением. Изменение математического ожидания не влияет на форму кривой, а только вызывает ее смещение вдоль оси x.**

Пример:

Рост в группе 101-M(x)=170 см, σ=5 см

102-M(x)=175 см, σ=5 см

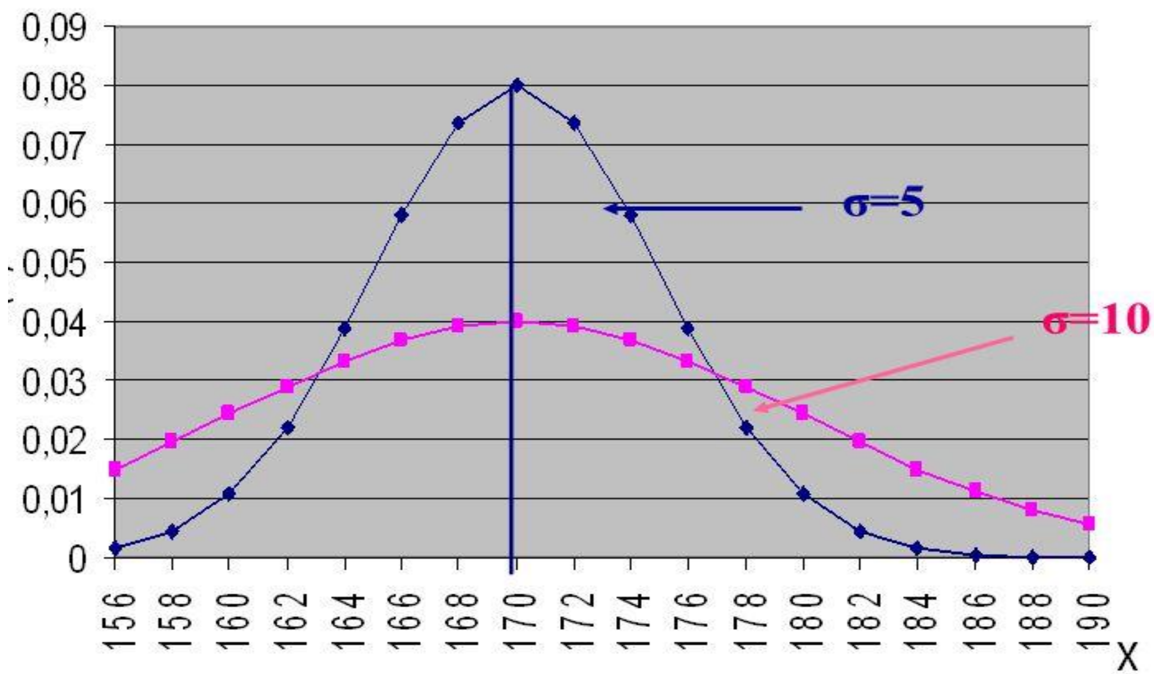


Параметр σ характеризует изменчивость случайной величины (меру растянутости кривой вдоль оси x): чем больше σ, тем больше кривая растянута.

Пример:

Рост в группе 101-M(x)=170 см, σ=5 см

102-M(x)=170 см, σ=10 см



Вероятность попадания в заданный интервал

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}\, dx$$

Преобразуем эту формулу так, чтобы можно было пользоваться готовыми таблицами. Введем новую переменную $z = (x - a)/\sigma$. Отсюда $x = \sigma z + a$, $dx = \sigma\, dz$. Найдем новые пределы интегрирования. Если $x = \alpha$, то $z = (\alpha - a)/\sigma$; если $x = \beta$, то $z = (\beta - a)/\sigma$.

Таким образом, имеем

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{(\alpha - a)/\sigma}^{(\beta - a)/\sigma} e^{-z^2/2}\, (\sigma\, dz) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\alpha - a)/\sigma}^{0} e^{-z^2/2}\, dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{(\beta - a)/\sigma} e^{-z^2/2}\, dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{(\beta - a)/\sigma} e^{-z^2/2}\, dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{(\alpha - a)/\sigma} e^{-z^2/2}\, dz.$$

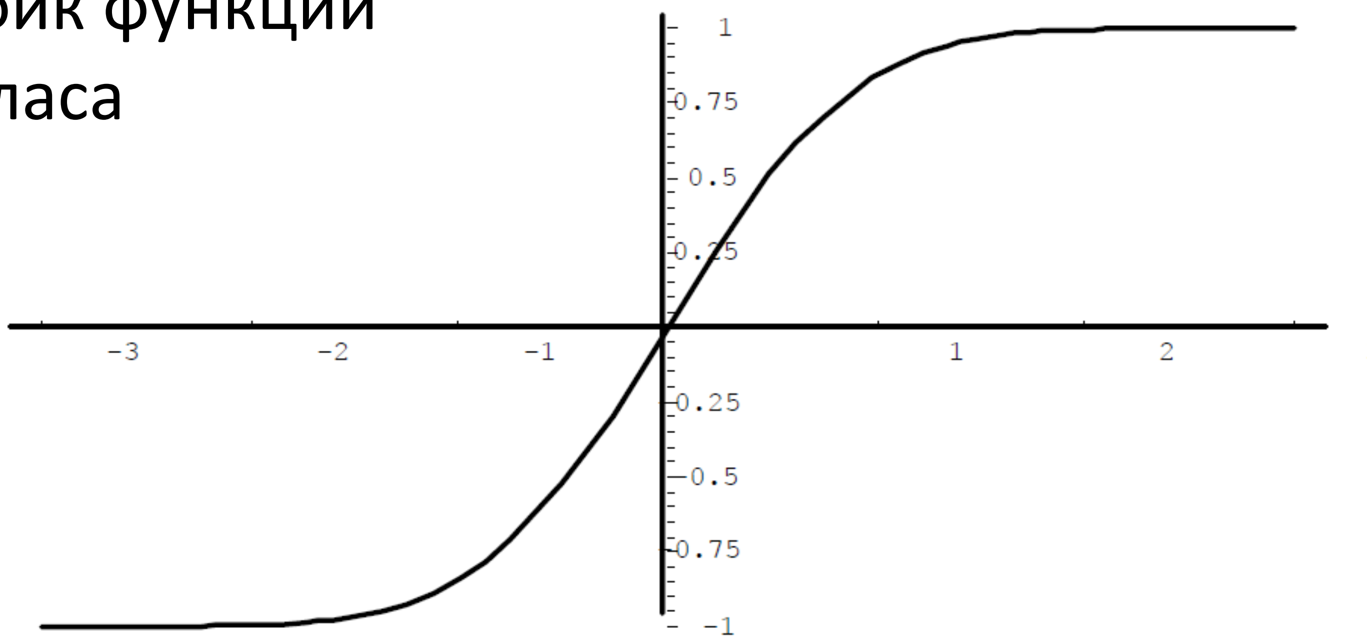
Пользуясь функцией Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2}\, dz,$$

окончательно получим

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

график функции Лапласа



X ... $a = 2$, ... (1; 4).

$$P(\alpha \le X < \beta) = \Phi_o\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi_o\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

$a=2$, $\sigma=5$, $\alpha=1$, $\beta=4$,

$$P(1 < X < 4) = \Phi_o\left(\frac{4-2}{5}\right) - \Phi_o\left(\frac{1-2}{5}\right) = \Phi_o(0,4) - \Phi_o(-0,2)$$

$\Phi_o(-0.2) = -\Phi_o(0.2)$

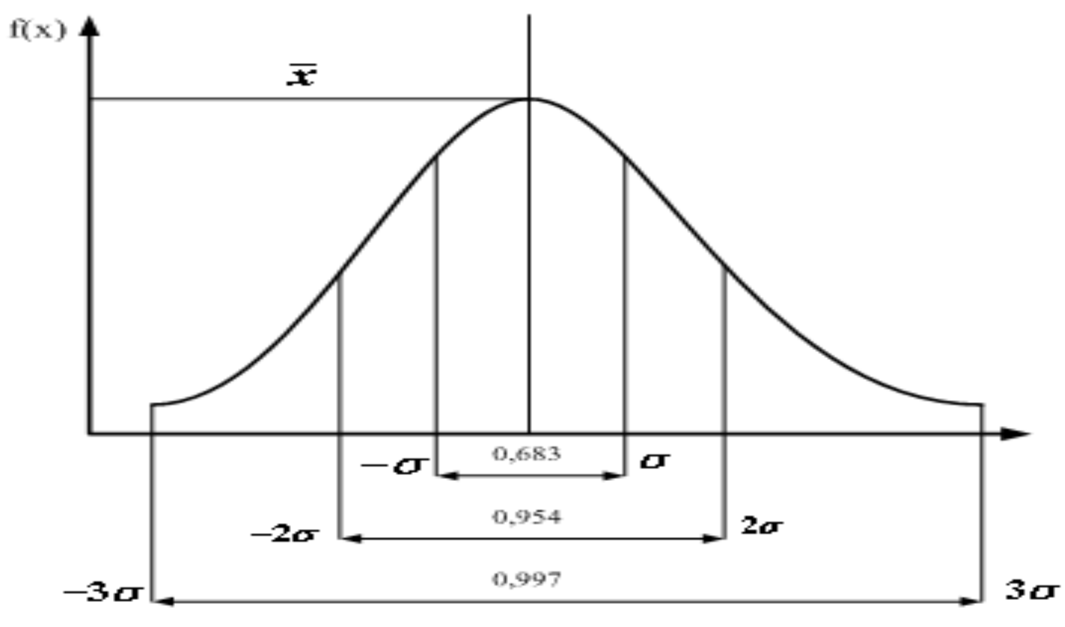
$P(1 < X < 4) = \Phi_o(0.4) + \Phi_o(0.2)$.

: $\Phi_o(0.4)=0.155$; $\Phi_o(0.2)=0.079$.

$P(1 < X < 4) = 0.234$

Правило трех сигм

Нормально распределенная случайная величина с большой вероятностью принимает значения, близкие к своему математическому ожиданию.



$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi(\delta/\sigma),$$

положив $\delta=\sigma t$. В итоге получим

$$P(|X-a|<\sigma t)=2\Phi(t).$$

Если $t=3$ и, следовательно, $\sigma t=3\sigma$, то

$$P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi(3)=2\cdot 0{,}49865=0{,}9973,$$

т. е. вероятность того, что отклонение по абсолютной величине будет меньше утроенного среднего квадратического отклонения, равна 0,9973.