Действия над ДСВ.
Числовые характеристики ДСВ.

Доцент Гончарова И.В.

1. Математические операции над дискретными случайными величинами

Пусть даны две случайные величины:

X:

x_1	x_2	…	x_n
p_1	p_2	…	p_n

Y:

y_1	y_2	…	y_m
p_1	p_2	…	p_m

Рис. 1.2

Тогда случайная величина kX, где k – const, принимает значения kx_i с теми же вероятностями p_i, $i=\overline{1,n}$, а случайная величина X^m принимает значения x_i^m с вероятностями p_i, $i=\overline{1,n}$.

1.1. Дана случайная величина X:

-2	-1	0	1	2
0,2	0,1	0,3	0,3	0,1

Найти закон распределения случайных величин: 1) $Y = -2X$; 2) $Z = X^2$.

Решение.

1) Значения Y будут: $-2\cdot(-2) = 4$; $(-2)\cdot(-1) = 2$; $(-2)\cdot 0 = 0$; $(-2)\cdot 1 = -2$; $(-2)\cdot 2 = -4$ с теми же вероятностями 0,2; 0,1; 0,3; 0,3; 0,1, но записывать их надо в порядке возрастания, т.е.

Y:

-4	-2	0	2	4
0,1	0,3	0,3	0,1	0,2

2) Значения Z будут: $(-2)^2 = 4$; $(-1)^2 = 1$; $0^2 = 0$; $1^2 = 1$; $2^2 = 4$.

Одинаковые значения учитываются только один раз, при этом их вероятности складываются. Так, $P(Z = 4) = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3$. Следовательно,

Z:

0	1	4
0,3	0,4	0,3

Суммой (разностью или произведением) случайных величин X и Y называется случайная величина, принимающая все возможные значения вида $x_i + y_j$ ($x_i - y_j$ или $x_i y_j$) с вероятностями P_{ij},

где $P_{ij} = P[(X = x_i,\ Y = y_j)]$ – вероятность того, что X примет значение x_i,

а Y – значение y_j, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

1.2. Даны законы распределения двух независимых случайных величин

X:

-1	0	1
0,2	0,3	0,5

1	2	3
0,3	0,5	0,2

Y:

Найти закон распределения случайной величины $Z = X+Y$.

Решение. Составим вспомогательную таблицу, в каждой внутренней клетке которой в левом углу запишем значения суммы $X+Y$, а в правом углу – вероятности этих значений

	y_j	-1	0	1
x_i	p_j / p_i	0,2	0,3	0,5
1	0,3	0 / 0,06	1 / 0,09	2 / 0,15
2	0,5	1 / 0,1	2 / 0,15	3 / 0,25
3	0,2	2 / 0,04	3 / 0,06	4 / 0,1

Так как среди значений Z имеются одинаковые, то соответствующие вероятности необходимо сложить. Например, $Z = X + Y = 1$ получено,

если $X = 2$, $Y = -1$ с вероятностью 0,1 и

$X = 1$, $Y = 0$ с вероятностью 0,09.

Поэтому $P(Z=1) = =0,1 + 0,09 = 0,19$. В результате получим распределение Z:

0	1	2	3	4
0,06	0,19	0,34	0,31	0,1

2. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины.

Характеристикой среднего значения случайной величины является математическое ожидание.

Математическим ожиданием M(x) дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее значений на их вероятности.

$$\boldsymbol{M(X) = a = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Математическое ожидание обладает следующими свойствами.

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: $\boldsymbol{M(c) = c}$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $\boldsymbol{M(kX) = kM(X)}$.

3. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$\boldsymbol{M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y).}$$

4. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$\boldsymbol{M(XY) = M(X) \cdot M(Y).}$$

5. Математическое ожидание отклонения случайной величины от ее математического ожидания $(X - M(X))$ равно нулю:

$$\boldsymbol{M(X - M(X)) = 0.}$$

2.1. Найти математическое ожидание случайной величины $Z = 2X - 3Y + 5$, если $M(X) = 2$, $M(Y) = -3$.

Решение. Используя свойства математического ожидания, найдем:

$M(Z) = 2M(X) - 3M(Y) + 5 = 2\cdot 2 - 3\cdot(-3) + 5 = 18.$

2.2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

-2	1	x_3
0,2	p_2	0,4

А также известно, что $M(X) = 2$. Найти p_2 и x_3.

Решение. Очевидно, что $p_2 = 0{,}4$, так как сумма вероятностей равна 1. По определению $M(X) = -2\cdot 0{,}2 + 1\cdot 0{,}4 + x_3\cdot 0{,}4 = 2$. Тогда $x_3 = 5$.

Теорема. Математическое ожидание M(X) числа появлений события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления событий в каждом испытании: M(X)=np.

Доказательство. Будем рассматривать в качестве случайной величины X число наступления события A в n независимых испытаниях. Очевидно, общее число X появлений события A в этих испытаниях складывается из чисел появлений события в отдельных испытаниях. Поэтому если X_1—число появлений события в первом испытании, X_2—во втором, ..., X_n—в n-м, то общее число появлений события $X=X_1+X_2+\ldots+X_n$.

$$M(X)=M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n).$$

$$M(X_1)=M(X_2)=M(X_n)=p$$

$$M(X)=np$$

Замечание. Так как величина X распределена по биномиальному закону, то доказанную теорему можно сформулировать и так: математическое ожидание биномиального распределения с параметрами n и p равно произведению np.

Пример. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия $p=0,6$. Найти математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.

Решение. Попадание при каждом выстреле не зависит от исходов других выстрелов, поэтому рассматриваемые события независимы и, следовательно, искомое математическое ожидание

$$M(X)=np=10\cdot 0,6=6 \text{ (попаданий)}.$$

X	$-0{,}01$	$0{,}01$		Y	-100	100
p	$0{,}5$	$0{,}5$		p	$0{,}5$	$0{,}5$

Найдем математические ожидания этих величин:

$$M(X) = -0{,}01 \cdot 0{,}5 + 0{,}01 \cdot 0{,}5 = 0,$$
$$M(Y) = -100 \cdot 0{,}5 + 100 \cdot 0{,}5 = 0.$$

Характеристикой рассеяния возможных значений случайной величины относительно математического ожидания является дисперсия.

Дисперсией D(X) случайной величины *X* называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 \qquad \textbf{(2.2).}$$

Дисперсию удобно вычислять по формуле

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 \qquad \textbf{(2.3).}$$

Доказательство. Математическое ожидание $M(X)$ есть постоянная величина, следовательно, $2M(X)$ и $M^2(X)$ есть также постоянные величины. Приняв это во внимание и пользуясь свойствами математического ожидания (постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания, математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых), упростим формулу, выражающую определение дисперсии:

$$D(X)=M[X-M(X)]^2=M[X^2-2XM(X)+M^2(X)]=$$
$$=M(X^2)-2M(X)M(X)+M^2(X)=$$
$$=M(X^2)-2M^2(X)+M^2(X)=M(X^2)-M^2(X).$$

Итак,

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2.$$

Квадратная скобка введена в запись формулы для удобства ее запоминания.

Дисперсия обладает следующими свойствами.

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$D(c) = 0.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его при этом в квадрат:

$$D(kX) = k^2 D(X).$$

3. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

Наряду с дисперсией в качестве показателя рассеяния случайной величины используют **среднее квадратическое отклонение** $\sigma(X)$, определяемое по формуле

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

2.3. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $Z = 5X - 2Y + 3$, если X и Y – независимые случайные величины и $D(X) = 4$, $D(Y) = 11$.

Решение. Используя свойства дисперсии, найдем $D(Z) = 25D(X) + 4D(Y) + 0 = 25\cdot 4 + 4\cdot 11 = 144$ и $\sigma(Z) = \sqrt{D(Z)} = 12$.

3. Функция распределения случайной величины.

Для описания закона распределения случайной величины X можно рассматривать не вероятность события $X=x$, а вероятность события $X < x$, где x – переменная.

Тогда вероятность $P(X < x)$ является некоторой функцией x. Подобное описание случайной величины X применимо как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, определяющая для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее

$$F(X) = P(X < x) \qquad (3.1).$$

Функцию $F(x)$ иногда называют **интегральной функцией распределения.**

3.1. Дан ряд распределения случайной величины X:

2	4	6	7	9
0,2	0,1	0,3	0,3	0,1

Найти и изобразить графически функцию $F(x)$.

Решение. Если $x \le 2$, то $F(x) = 0$. Действительно, так как величина X не принимает значений, меньших числа 2, то $P(X < x) = 0$.

Если $2 < x \le 4$, то X может принять только значение 2 с вероятностью 0,2. Следовательно, $F(x) = 0{,}2$.

Если $4 < x \le 6$, то X может принять либо значение 2 с вероятностью 0,2, либо значение 4 с вероятностью 0,1. Тогда одно из этих значений, неважно какое, X может принять с вероятностью $0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3$ и $F(x) = 0{,}3$.

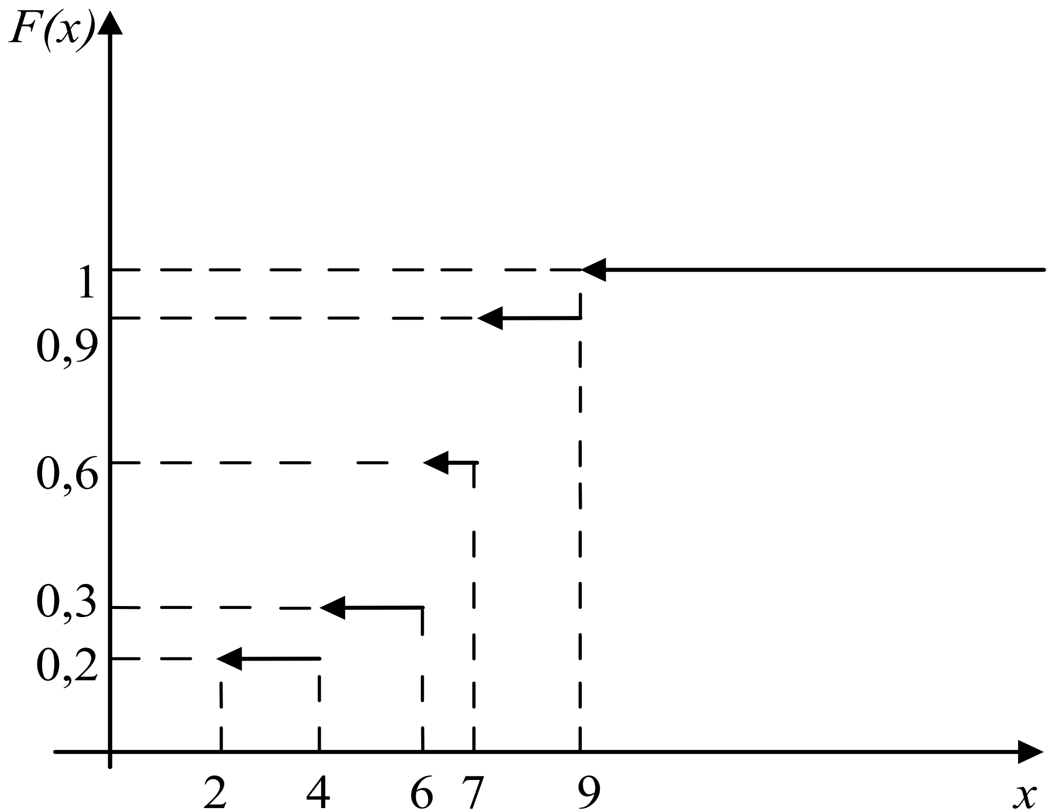
Если $6 < x \le 7$, то $F(x) = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}6$. Действительно, X может принять любое их трех значений: 2, 4, 6.

Если $7 < x \le 9$, то $F(x) = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}3 = 0{,}9$.

Если $x > 9$, то $F(x) = 1$. Действительно, событие $X \le 9$ достоверно и вероятность его равна единице.

Итак, искомая функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ 0{,}2, & 2<x\le 4\\ 0{,}3, & 4<x\le 6\\ 0{,}6, & 6<x\le 7\\ 0{,}9, & 7<x\le 9\\ 1, & x>9\end{cases}$$



- Этот пример позволяет сделать вывод о том, что функция распределения любой дискретной величины является разрывной ступенчатой функцией, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины и равны вероятностям этих значений.
- Заметим, что для непрерывной случайной величины X функция распределения $F(x)$ является непрерывной.

Функция распределения обладает следующими свойствами.

1. Значения $F(x)$ принадлежат отрезку [0;1]: $0 \le F(x) \le 1$.

2. Функция $F(x)$ является неубывающей функцией:

$F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 > x_1$.

3. Вероятность попадания случайной величины X в интервал $[x_1, x_2)$ равна приращению $F(x)$ на этом интервале:

$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

4. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу (a,b), то $F(x) = 0$ при $x \le a$ и $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

5. Справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$$