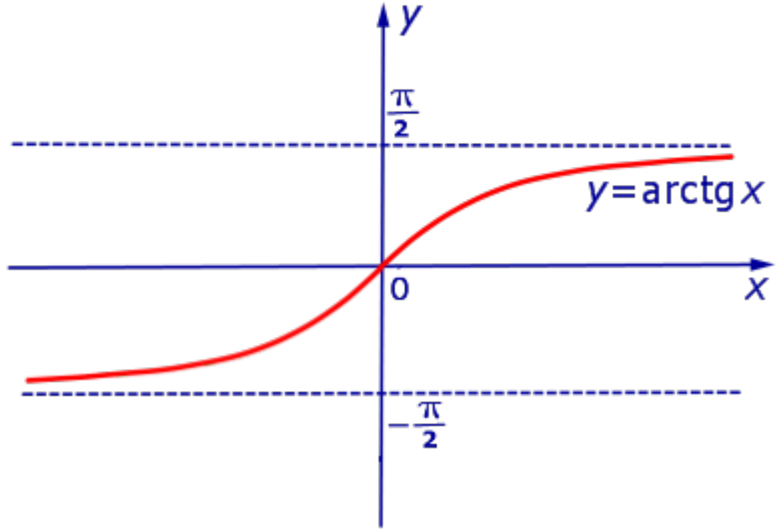
ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Доцент Гончарова И.В.

Ограниченные функции.

Определение. Функция y=f(x) называется **ограниченной**, если область ее значений является ограниченным множеством. Иными словами, функция y=f(x), $x \in X$ ограничена, если существует число $r > 0$ такое, что $|f(x)| < r$ для всех $x \in X$.



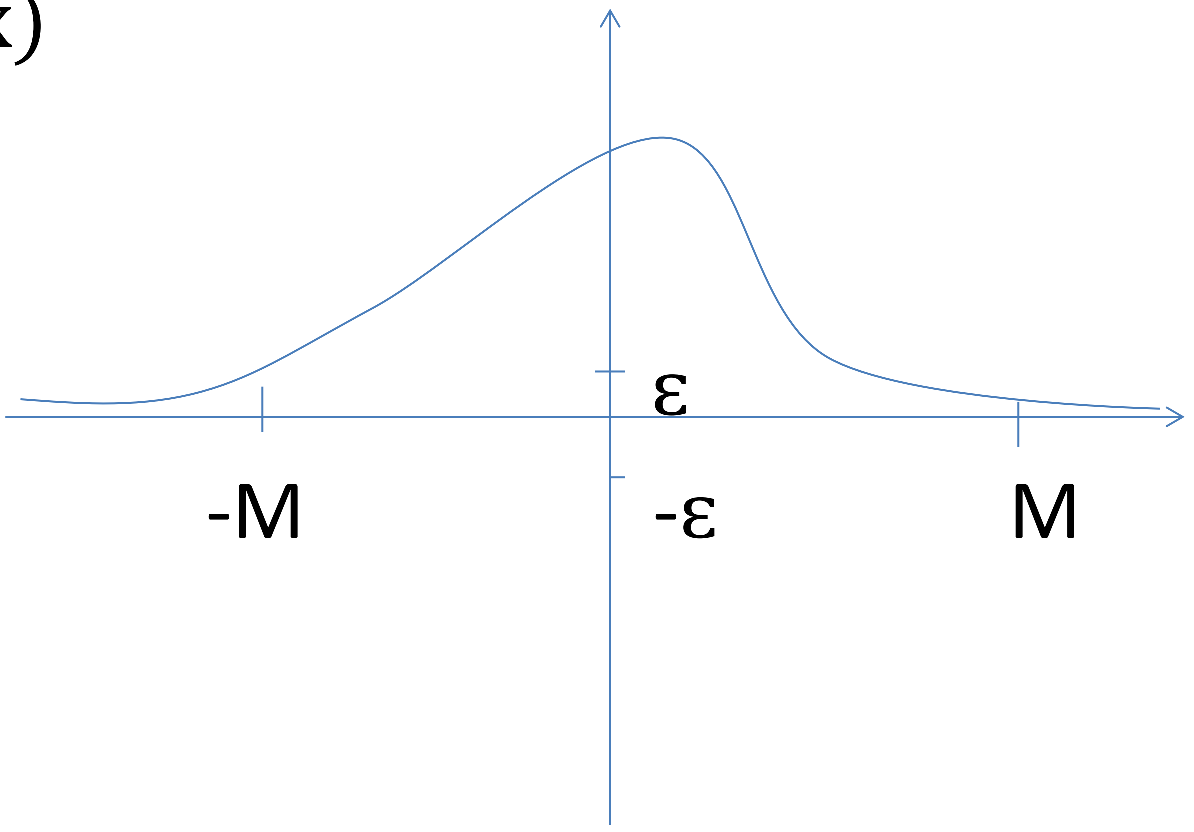
Предел функции на бесконечности.

Определение. Функцию $\alpha(x)$, определенную на объединении двух лучей

$(-\infty, a_1] \cup [a_2, +\infty]$ называют, **бесконечно малой** при $x \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M > 0$ такое, что для всех x таких, что $|x| > M$, выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$

$y = \alpha(x)$



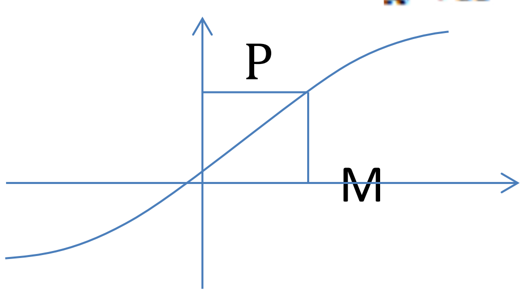
Основные теоремы.

1. Постоянная функция $y=c$ является бесконечно малой при $x\to\infty$ тогда и только тогда, когда $c=0$.
2. Если $\beta(x)$ – бесконечно малая функция при $x\to+\infty$ и для всех x из некоторого луча $[Q,+\infty)$ выполняется неравенство $|\alpha(x)|\leq|\beta(x)|$, то $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to+\infty$. (Аналогично, при $x\to-\infty$).
3. Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to\infty$, то она является ограниченной на некотором луче $[|M|, \infty)$.
4. Сумма двух бесконечно малых при $x\to\infty$ функций является бесконечно малой при $x\to\infty$ функцией.
5. Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to\infty$, а $y=f(x)$- ограниченная функция на объединении лучей $(-\infty,a_1]\cup[a_2,+\infty]$, то их произведение является бесконечно малой при $x\to\infty$ функцией.

Определение. Функцию f(x), определенную на объединении двух лучей

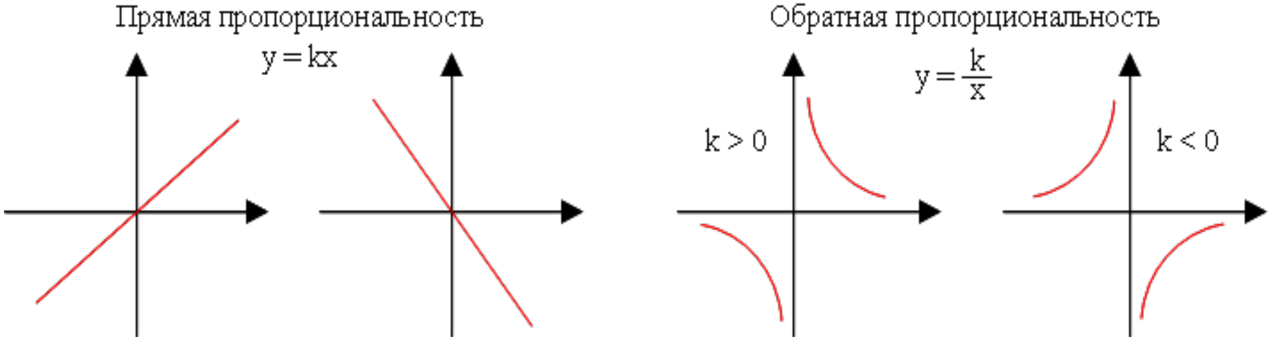
$(-\infty, a_1) \cup (a_2, +\infty]$ называют, **бесконечно большой** при $x \to \infty$, если для любого $P>0$ существует число $M>0$ такое, что для всех x таких, что $|x|>M$, выполняется неравенство $|f(x)|>P$.

Обозначение: $$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$



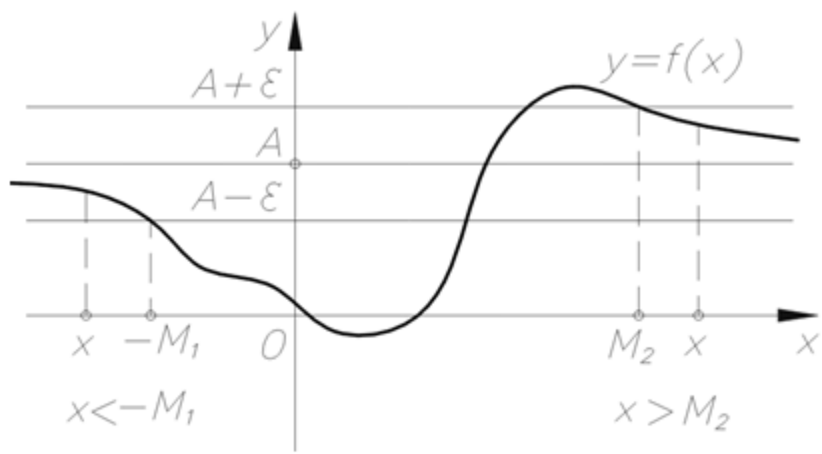
Теорема. Для того, чтобы функция f(x) ,была бесконечно большой при $x\to\infty$, необходимо и достаточно, чтобы функция 1/ f(x) была бесконечно малой при $x\to\infty$.

Пример. $y=к/x$ – бесконечно малая функция , $y=кx$ - бесконечно большая при $x\to\infty$.



Определение. Число А называется **пределом функции** f(x) **на бесконечности** или при $x\to\infty$, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $M>0$ такое, что для всех x таких, что $|x|>M$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

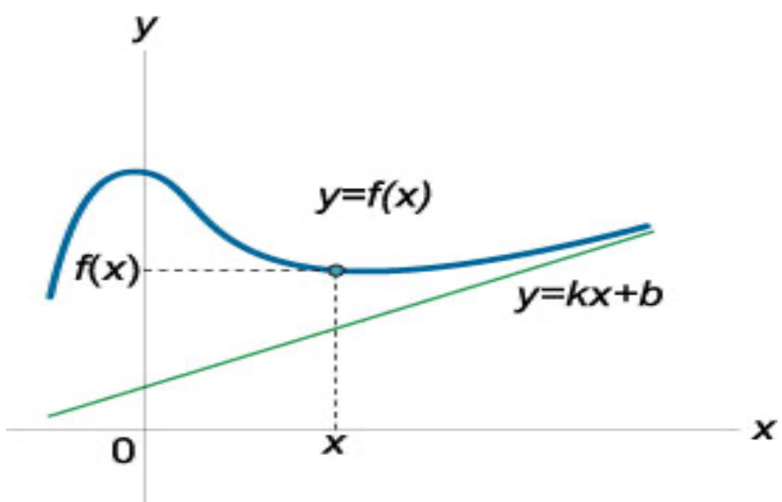
Обозначение: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$



Асимптоты.

Определение. Прямая y=kx+b называется **асимптотой** графика функции y=f(x) при $x\to\infty$, если $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-(кx+b))=0$

Другими словами, если отклонение графика функции f(x) от прямой y=kx+b неограниченно уменьшается при $x\to\infty$



Алгоритм отыскания асимптоты графика функции.

1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Если этот предел существует и равен b, то y=b – горизонтальная асимптота; если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ =∞, то перейти к пункту 2.
2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$. Если этот предел не существует, то асимптоты нет; если он существует и равен $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, то перейти к пункту 3.
3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx)$. Если этот предел не существует, то асимптоты нет; если он существует и равен bто перейти к пункту 4.
4. Записать уравнение наклонной асимптоты y=kx+b.

Найти асимптоту графика функции $y = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 3}{2x^2 + 5}$

$$1.\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 3}{2x^2 + 5} = \infty$$

$2.\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 3}{x(2x^2 + 5)} = 1/2$, значит ½.

$3.\ \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3 - 6x^2 + 3}{2x^2 + 5} - \dfrac{1}{2}x\right) = -3$, т.е. b=-3

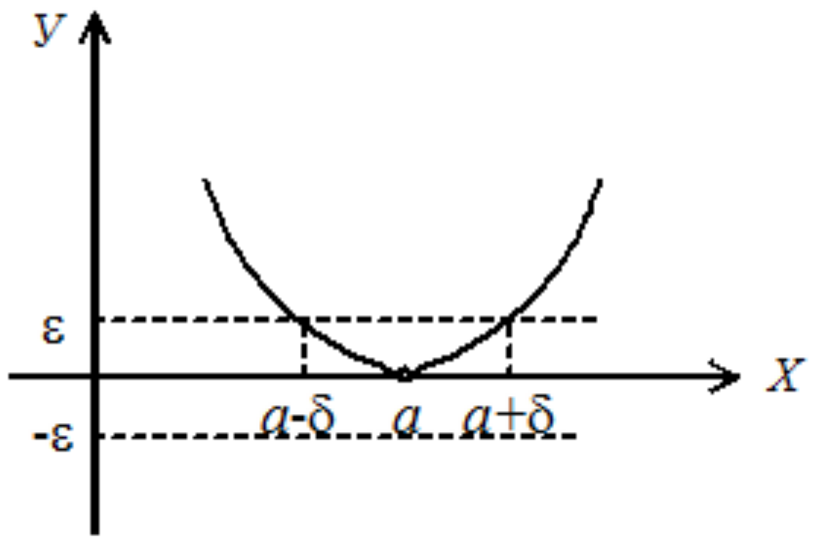
4. Уравнение асимптоты y=1/2x -3.

Предел функции в точке.

Определение. Функцию $\alpha(x)$, **бесконечно малой** при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\boldsymbol{\delta} > 0$ такое, что для всех x таких, что $0 < |x-a| < \boldsymbol{\delta}$, выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Обозначение: $$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0$$

Геометрически неравенство $0 < |x-a| < \boldsymbol{\delta}$ описывает проколотую $\boldsymbol{\delta}$ – окрестность точки a.



Основные теоремы.

1. Постоянная функция $y=c$ является бесконечно малой при $x \to a$ тогда и только тогда, когда $c=0$.
2. Если $\beta(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$ и для всех x в проколотой окрестности точки a выполняется неравенство $|\alpha(x)| \leq |\beta(x)|$, то $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$.
3. Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$, то она является ограниченной в проколотой окрестности точки a.
4. Сумма двух бесконечно малых при $x \to a$ функций является бесконечно малой при $x \to a$ функцией.
5. Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$, а $y=f(x)$- ограниченная функция, в окрестности точки a, то их произведение является бесконечно малой при $x \to a$ функцией.

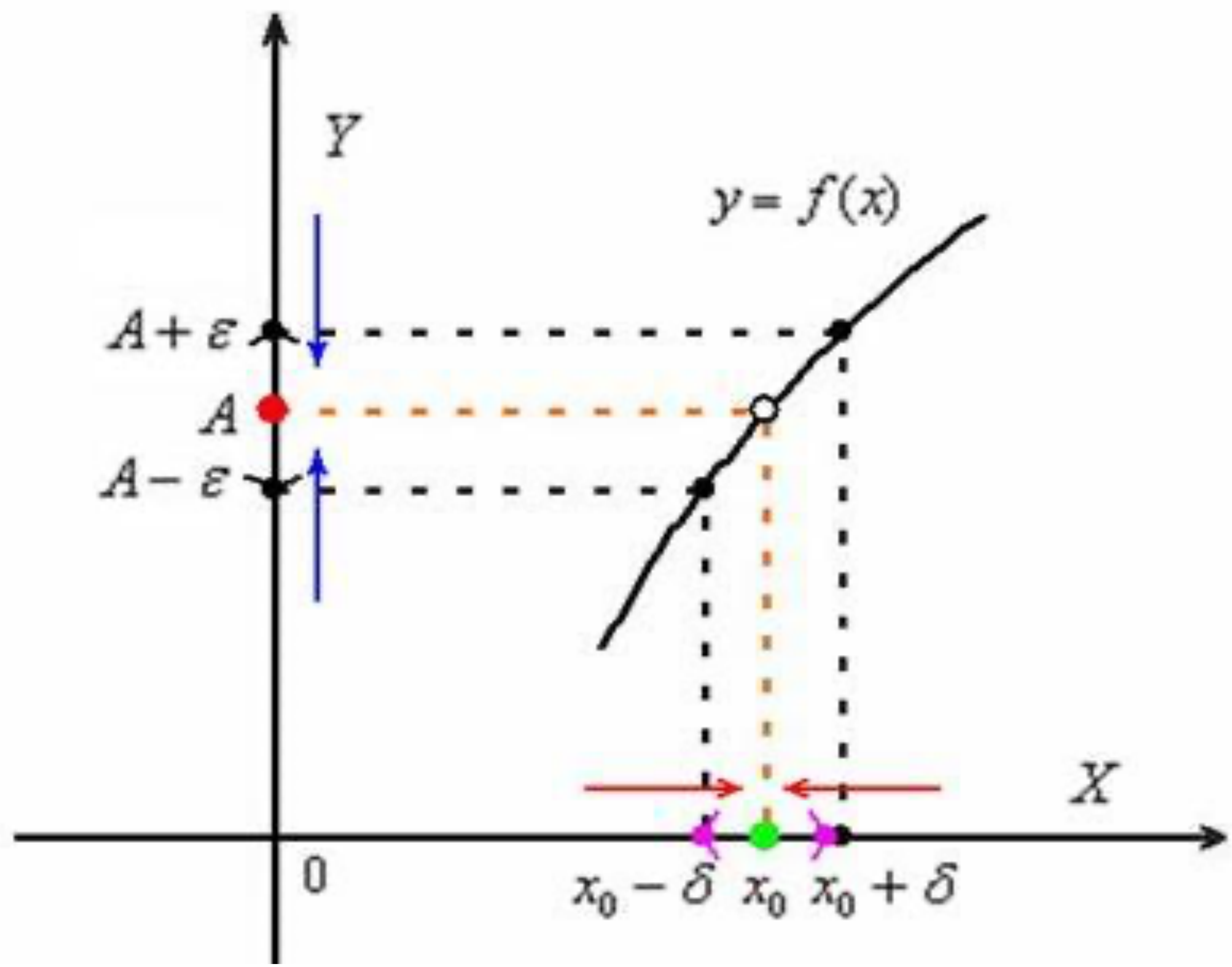
Определение.

Предел функции в точке

- Определение Коши (в терминах $\varepsilon - \delta$)

Число А называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 (при $x \to x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$

$$\boxed{\begin{gathered}(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x : |x - x_0| < \delta, x \neq x_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = A\end{gathered}}$$



Y
y = f(x)
A + ε
A
A − ε
X
0
x0 − δ
x0
x0 + δ

Основные теоремы о пределе функции в точке.

1. Если функция имеет предел при $x \to x_0$, то только один.
2. Если функция имеет предел при $x \to x_0$, то она ограничена в некоторой проколотой окрестности точки x_0 .
3. (о предельном переходе в неравенствах) Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b, \lim\limits_{x \to a} g(x) = c,$

и в некоторой проколотой окрестности точки а выполняется неравенство $f(x) \leq g(x)$, то $b \leq c$

Теоремы об арифметических операциях.

$$\lim_{x\to a} c = c, c - const,$$

$$\lim_{x\to a}\left(f_1(x) \pm f_2(x)\right) = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x),$$

$$\lim_{x\to a}\left(f_1(x) \cdot f_2(x)\right) = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x),$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f_1(x)}{\lim_{x\to a} f_2(x)}, \quad \lim_{x\to a} f_2(x) \neq 0.$$

$$\lim_{x\to 1}(x^3 - 2x^2 + 5x + 3) = 1^3 - 2\cdot 1^2 + 5\cdot 1 + 3 = 7$$

Односторонние пределы

Пусть функция ***f(x)*** определена только слева (или только справа) от ***a***, т.е. в интервале $x < a$ ($x > a$).

Определение 1.

Число ***a*** называется *левосторонним пределом* функции ***f(x)*** при $x \to a_{-}$ (***x < a***), если

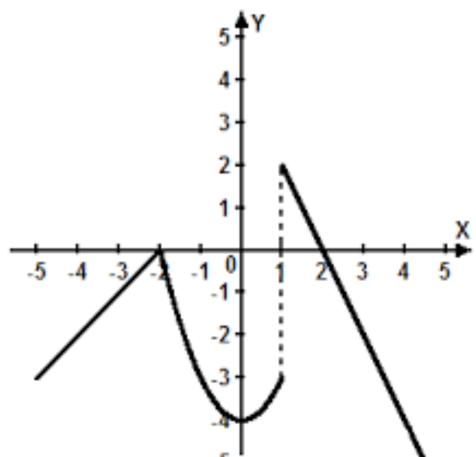
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : a - \delta < x < a \quad \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to a-} f(x) = A \qquad \lim_{x \to a-0} f(x) = A$$

Определение 2.

Число ***a*** называется *правосторонним пределом* функции ***f(x)*** при $x \to a_{+}$ (***x >a***), если

$$\lim_{x \to a+} f(x) = A \qquad \lim_{x \to a+0} f(x) = A$$



Теорема о существовании предела

Функция *y* = *f*(*x*) имеет $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

в том и только том случае, когда существуют и равны друг другу ее левосторонний и правосторонний пределы при $x \to a$.

Тогда $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ = $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ =

= $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A.$

Непрерывность

Функция *f(x),* определенная на множестве X, называется *непрерывной в точке* x_0 , если $x_0 \in X$

1)она определена в этой точке,

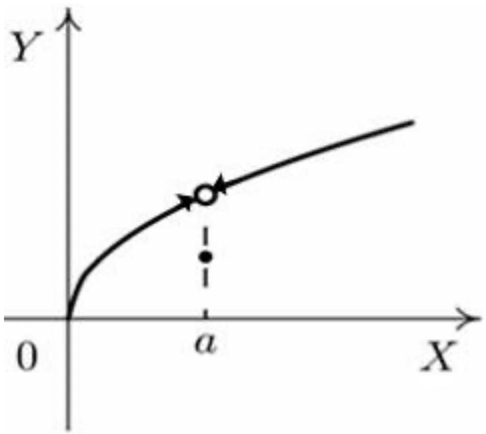
2) существует $\lim_{x \to x_0} f(x)$ и

3) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x+4}} = \frac{\sin 2\pi}{\sqrt{2+4}} = \frac{0}{\sqrt{2+4}} = 0$$

Точки разрыва. Классификация.

1. Точка устранимого разрыва. Односторонние пределы функции f(x) существуют при x→a, равны между собой, но не равны значению функции в этой точке.



2. Скачок.

Односторонние пределы существуют, но не равны.

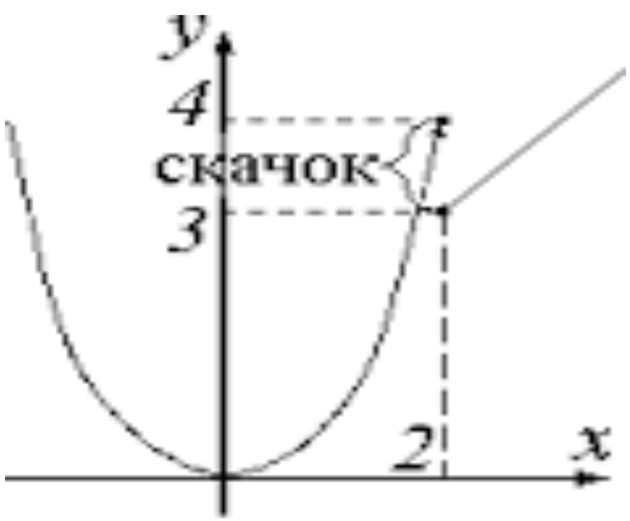
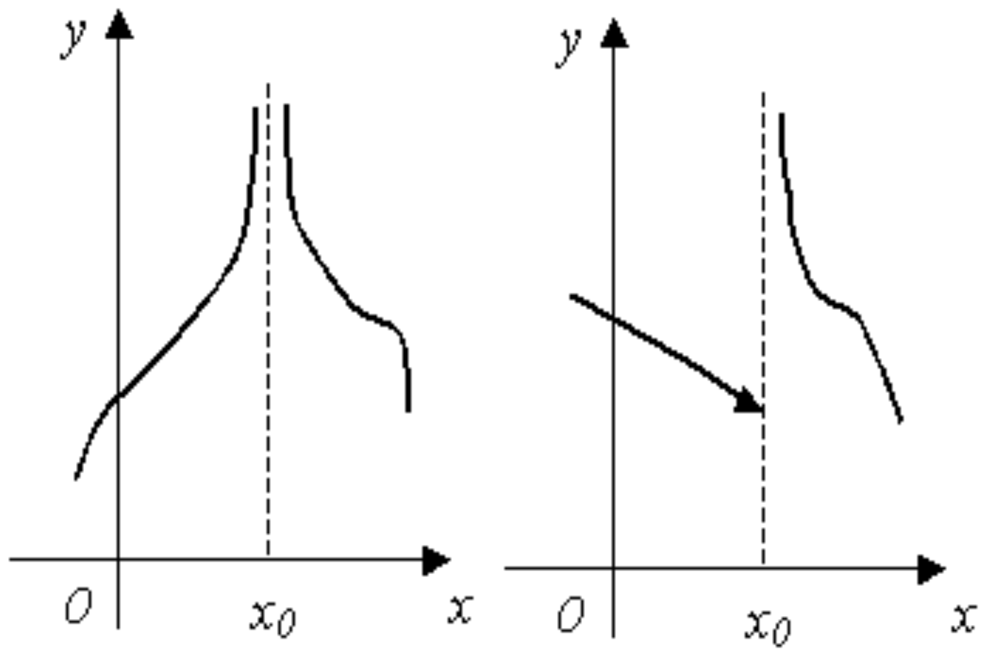


Рис. 2

3. Разрыв второго рода.

Хотя бы один из односторонних пределов не существует.



Техника вычисления пределов. Раскрытие неопределенностей.

1. Неопределенность 0/0.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{21+x}-5\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}{\left(x^3-64\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{21+x-25}{\left(x^3-64\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\left(x-4\right)\left(x^2+4x+16\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\left(x^2+4x+16\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=\frac{1}{480}.$$

2. Неопределенность 1^∞

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}=\left[1^\infty\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x}{2x-3}-1\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-2x+3}{2x-3}\right)^{2-5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2x-3}{3}}\right)^{\frac{2x-3}{3}}\right)^{\frac{3(2-5x)}{2x-3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3(2-5x)}{2x-3}}=e^{-15/2}$$

3. Неопределенность ∞/∞

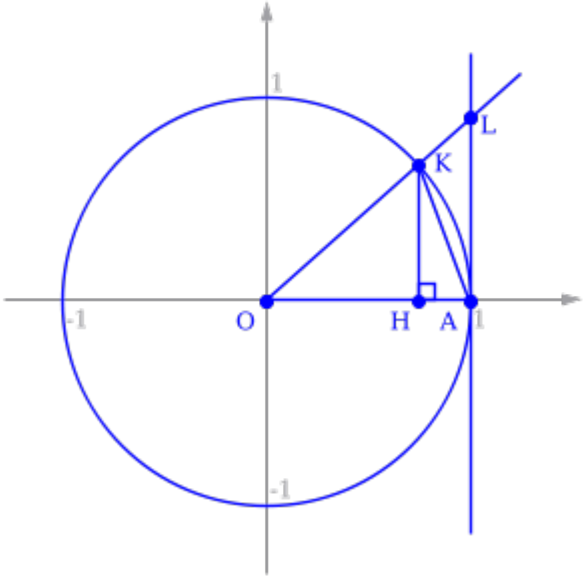
$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-4x^2+x-1}{7x^2+8x+11}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(5x^3-4x^2+x-1\right)/x^3}{\left(7x^2+8x+11\right)/x^3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^3}{x^3}-\frac{4x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}-\frac{1}{x^3}}{\frac{7x^2}{x^3}+\frac{8x}{x^3}+\frac{11}{x^3}}=\frac{\frac{5}{1}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{11}{x^3}}=\frac{5}{0}=\infty.$$

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Доказательство.



$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x} \qquad \lim_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x}$$

$$S_{\Delta OKA}<S_{sectOKA}<S_{\Delta OAL}$$

$$S_{\Delta OKA}=\frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|KH|=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin x=\frac{\sin x}{2}$$

$$S_{sectOKA}=\frac{1}{2}R^2x=\frac{x}{2}$$

$$S_{\triangle OAL}=\frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|LA|=\frac{\mathrm{tg}x}{2}$$

$$x \to 0+ : \sin x > 0, x > 0, \mathrm{tg} x > 0$$

$$\frac{1}{\mathrm{tg} x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\lim_{x \to 0+} \cos x < \lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad 1 < \lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{\sin x}{x} = \begin{bmatrix} u = -x \\ x = -u \\ u \to 0+ \\ x \to 0- \end{bmatrix} = \lim_{u \to 0+} \frac{\sin(-u)}{-u} = \lim_{u \to 0+} \frac{-\sin(u)}{-u} = \lim_{u \to 0+} \frac{\sin(u)}{u} = 1$$

Правый и левый односторонний пределы существуют и равны 1, а значит и сам предел равен 1

Следствия из первого замечательного предела.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$$

Второй замечательный предел.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

Следствия из второго замечательного предела.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$$

Пример Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1.$$

Пример Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 4x}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{5/4}{\frac{\sin 4x}{4x}}=\frac{5/4}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}}=\frac{5/4}{1}=1{,}25.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{4x+1}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{4x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{4x}\cdot\left(1+\frac{3}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{4x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3\cdot 4}\cdot 1=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^{12}=e^{12}.$$

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{2/(2x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+2x)^{1/(2x)}\right]^{2}=$$

$$\left[\lim_{2x\to 0}(1+2x)^{1/(2x)}\right]^{2}=e^{2}.$$