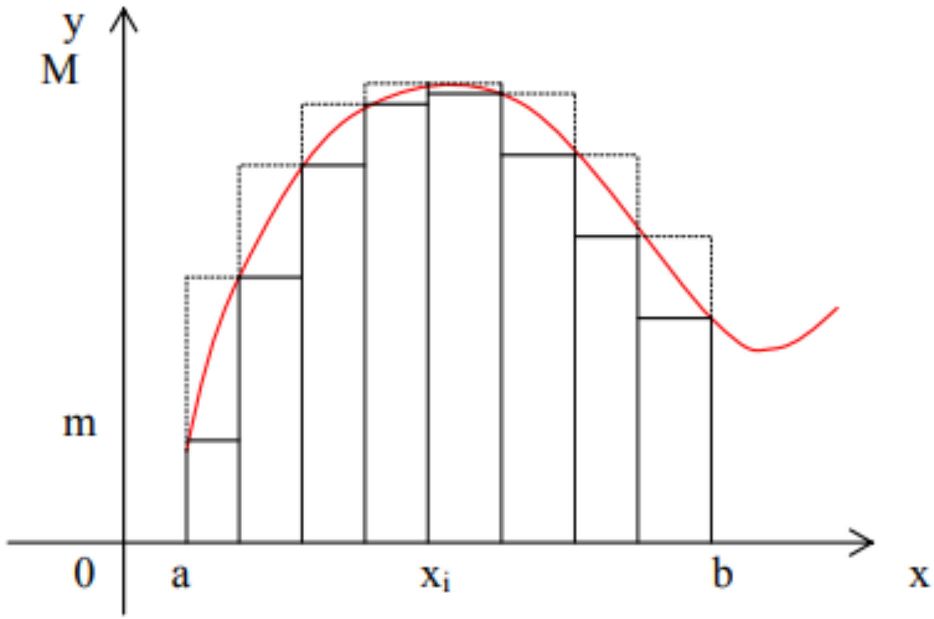
Определенный интеграл

Пусть на отрезке [a, b] задана непрерывная функция $f(x)$.



Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке [a, b] Разобьем отрезок [a, b] на части (не обязательно одинаковые) n точками.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, … ,$x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;

На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$[x_0, x_1] \to m_1, M_1$; $[x_1, x_2] \to m_2, M_2$; … $[x_{n-1}, x_n] \to m_n, M_n$.

Составим суммы:

$$\underline{S}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ \dots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$\overline{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \dots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Сумма $\underline{S}$ называется **нижней интегральной суммой**, а сумма $\overline{S}$ – **верхней интегральной суммой**.

Т.к. $m_i \le M_i$, то $\underline{S}_n \le \overline{S}_n$, а $m(b-a) \le \underline{S}_n \le \overline{S}_n \le M(b-a)$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε.

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \varepsilon < x_2, \ \ldots \ , x_{n-1} < \varepsilon < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции f(x) на отрезке [a, b].

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Тогда можно записать: $m_i\Delta x_i \le f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le M_i\Delta x_i$

Следовательно, $\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$

$$\underline{S_n} \le S_n \le \overline{S_n}$$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции f(x) ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

Обозначим $max\Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения, а $min\Delta x_i$ – наименьший. Если $max\Delta x_i \to 0$, то число отрезков разбиения отрезка [a, b] стремится к бесконечности.

Если $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$, то $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S.$

Определение: Если при любых разбиениях отрезка [a, b] таких, что $max \Delta x_i \to 0$ и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, который называется определенным интегралом от f(x) на отрезке [a, b].

Обозначение : $\int_a^b f(x)dx.$

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, [a, b] – отрезок интегрирования.

Определение: Если для функции f(x) существует предел $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx$, то функция называется **интегрируемой** на отрезке [a, b].

Также верны утверждения: $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx$

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Теорема: Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла.

1) $\int\limits_a^b Af(x)dx = A\int\limits_a^b f(x)dx;$

2) $\int\limits_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx$

3) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$

4) Если $f(x) \leq \varphi(x)$ на отрезке [a, b] $a < b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b \varphi(x)dx$

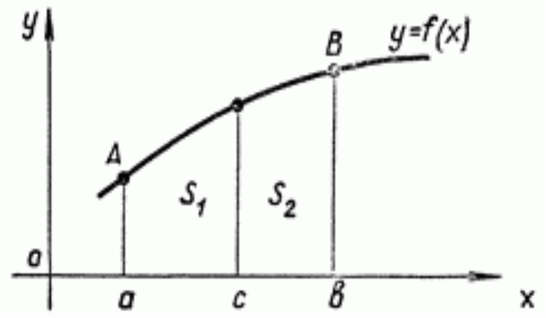
5) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции f(x) на отрезке [a, b], то:

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Аддитивность определенного интеграла.

Теорема. Если функция y=f(x) интегрируема на отрезках [a,c] и [c,b], a<c<b , то она интегрируема и на отрезке [a,b], причем выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$



6) **<u>Теорема о среднем.</u>** Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то на этом отрезке существует точка ε такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$$

<u>Доказательство:</u> В соответствии со свойством 5:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

т.к. функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она принимает на этом отрезке все значения от m до M. Другими словами, существует такое число ε∈ [a, b], что если $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu$ и μ = f(ε), а a ≤ ε ≤ b, тогда $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$. Теорема доказана.

7) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

8) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Существование первообразной у непрерывной функции.

Теорема. Если функция **f(x)** непрерывна на отрезке **[a,b]**, то функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ дифференцируема в любой внутренней точке x этого отрезка, причем $\Phi`(x) = f(x)$. Иными словами, *интеграл с переменным верхним пределом является одной из первообразных для непрерывной подынтегральной функции*.

Формула Ньютона –Лейбница.

Если функция y=f(x) непрерывна на отрезке **[a,b],** то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

где F(x) – первообразная для функции **f(x)**.

<u>**Доказательство:**</u> согласно теореме о существовании первообразной $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Тогда для любой первообразной **F(x)** имеем **Φ(x)=F(x)+C.**

Заметим, $\Phi(a) = \int\limits_a^a f(t)dt = 0$. Тогда, если

Ф(a)=F(a)+C=0, то C=-F(a).

Итак, **Ф(x)=F(x)- F(a)**, в частности,

Ф(b)=F(b)- F(a). Но

$$\Phi(b) = \int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^b f(x)dx$$

Итак, $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Интегрирование «по частям» в определенном интеграле.

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Формула для запоминания: $\int_a^b u\,dv = uv|_a^b - \int_a^b v\,du.$

Пример.

$$\int_1^2 xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{vmatrix}$$

$$= xe^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2 \cdot e^2 - 1 \cdot e^1 - e^x \Big|_1^2 = 2e^2 - e - (e^2 - e)$$

$$= e^2$$

Замена переменной в определенном интеграле.

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

Теорема 1. Пусть $x = x(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_a, t_b]$ и $a = x(t_a)$, $b = x(t_b)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_a}^{t_b} f\big(x(t)\big)x'(t)dt.$$

Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3}\, dx.$$

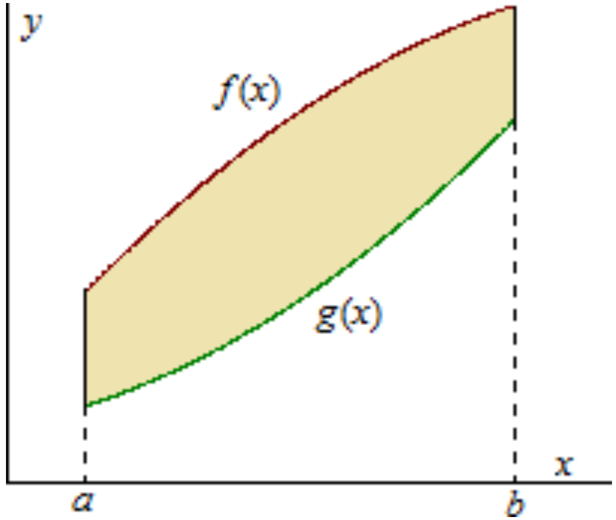
Решение. Применим подстановку $\sqrt{e^x - 1} = t$, отсюда при $x_1 = 0$ $t_1 = 0$, при $x_2 = \ln 5$ $t_2 = 2$. Следовательно, когда x изменяется на отрезке $[0;\ \ln 5]$, новая переменная t изменяется на отрезке $[0;2]$. Функция $x = \ln(1 + t^2)$, обратная к функции $t = \sqrt{e^x - 1}$, является монотонной, непрерывной вместе с ее производной $x_t' = \dfrac{2t}{1 + t^2}$ на этом отрезке. Таким образом, законность подстановки доказана. Имеем:

$$\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} = 2\int\limits_0^2 \frac{t^2\, dt}{t^2 + 4} = 2\int\limits_0^2 \left(1 - \frac{4}{t^2 + 4}\right) dt =$$

$$= 2\left[t - 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{2}\right]_0^2 = 4 - \pi.$$

Геометрические приложения определенного интеграла.

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f(x)$, $y = g(x), a \leq x \leq b$.



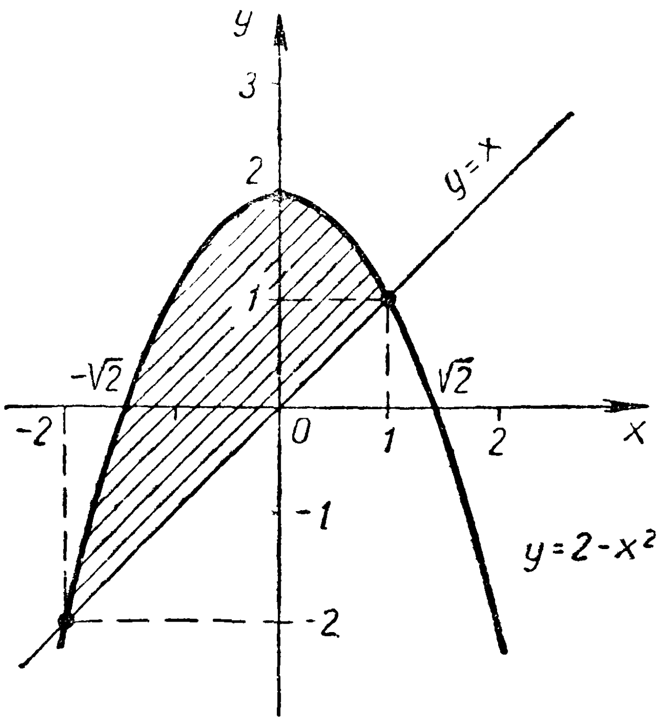
$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

Замечание: формула верна вне зависимости от знака функций $f(x)$ и $g(x)$.

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y = x$ и параболой $y = 2 - x^2$.

$$\begin{cases} y = x, \\ y = 2 - x^2. \end{cases}$$

Решая систему, получим $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ — это и будут пределы интегрирования. Искомая площадь равна:



$$S = \int_{-2}^{1} [(2 - x^2) - x]\, dx = 2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^{1} = \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(-4 + \frac{8}{3} - 2\right) = \frac{9}{2}.$$

Определение несобственных интегралов с бесконечными пределами.

Для существования определенного интеграла необходимо, чтобы промежуток интегрирования был конечен, а подынтегральная функция ограничена на нем, в противном случае множество сумм Дарбу не будет ограниченным. Возможны случаи, когда одно или оба из этих условий не выполняются, т.е. когда промежуток интегрирования бесконечен или подынтегральная функция не ограничена. Такие интегралы называются ***несобственными.***

Несобственные интегралы первого рода (промежуток интегрирования луч [a,+ ∞].

Определение. Пусть функция **y=f(x)** интегрируема на каждой конечной части луча, т.е.для любого **c >a** существует интеграл $I(c) = \int\limits_a^c f(x)\,dx$.

За значение несобственного интеграла первого рода $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ принимают предел функции $I(c)$, когда **c** стремится к $+\infty$.

П р и м е р 1. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\,dx.$$

Р е ш е н и е. Подынтегральная функция определена и непрерывна при всех значениях x и, следовательно, имеет первообразную $\Phi(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$. По определению имеем:

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = \lim_{b \to \infty}\int_0^{b} xe^{-x^2}\,dx = \lim_{b \to \infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^b\right] =$$

$$= \lim_{b \to \infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-b^2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}.$$

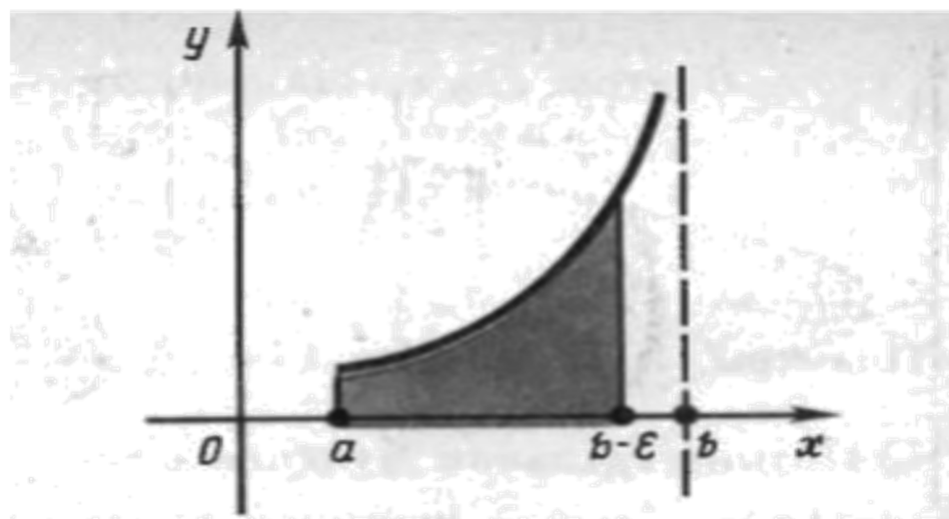
При аналогичных предположениях относительно функции f(x) можно рассмотреть случай, когда верхний предел фиксирован, а нижний предел стремится к $-\infty$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{c\to-\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx$$

Несобственный интеграл второго рода.

Пусть функция **f(x)** определена во всех точках отрезка **[a,b]**,кроме точки с; пусть **x=c** вертикальная асимптота графика функции **y=f(x)**, причем после удаления некоторой достаточно малой ε-окрестности точки с останется два отрезка **[a, c-ε]** и **[c+ε,b]**, на каждом из которых функция интегрируема.

Такая точка называется особой.



Определение. Пусть функция f(x) не ограничена на отрезке [a,b], но интегрируема на любом отрезке [a,b-ε], где ε>0. За значение несобственного интеграла второго рода принимают

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

Если единственная особая точка лежит внутри отрезка [a,b] то полагают

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to -0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to +0}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

П р и м е р 1. Вычислить несобственный интеграл

$$I = \int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}\,dx.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем интеграл следующим образом:

$$I = \int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}\,dx = \int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}\,dx - \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \underbrace{\int_1^2 \sqrt{x-1}\,dx}_{I_1} - \underbrace{\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}}_{I_2}$$

В интеграле I_1 подынтегральная функция непрерывна в промежутке $[1;\ 2]$, поэтому его можно вычислять по формуле Лейбница

$$I_1 = \int_1^2 \sqrt{x-1}\,dx = \left.\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^2 = \frac{2}{3}.$$

Интеграл I_2 несобственный, так как подынтегральная функция $\frac{1}{\sqrt{x-1}} \to \infty$ при $x \to 1$. По определению имеем:

$$I_2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\varepsilon \to 0} 2\sqrt{x-1}\,\Big|_{1+\varepsilon}^2 = 2\,[\sqrt{2-1} - \lim_{\varepsilon \to 0} \sqrt{(1+\varepsilon)-1}\,] = 2.$$

Окончательно, $I = I_1 - I_2 = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$.