Интегральное исчисление

Неопределенный интеграл

Первообразная, неопределенный интеграл

Опр. Функция $F(x)$ – ***первообразная*** функции $f(x)$, если $F(x)$ дифференцируема на D и $F'(x) = f(x)$.

Пример. Функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$ является первообразной функции $f(x) = x^2$.

Теорема 1. Первообразные одной функции отличаются не более чем на постоянную величину. (т.е. если $F(x)$ и $\Phi(x)$ две первообразные функции $f(x)$, то $\exists c \in \boldsymbol{R}$:

$F(x) = \Phi(x) + c$)

Опр. Семейство всевозможных первообразных функции называется ***неопределенным интегралом***

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \quad \text{где} \quad F'(x) = f(x).$$

Свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;
2. $\int dF(x) = F(x) + c$;
3. Линейность: $\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$;
4. Подобие: если $F(x)$ – *первообразная* $f(x)$**,** то $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + c$;
5. Смещение: если $F(x)$ – *первообразная* $f(x)$**,** то $\int f(x+b)dx = F(x+b) + c$;
6. Неопределенный интеграл инвариантен относительно переменной: т.е., если $\int f(x)dx = F(x) + c$, то $\int f(t)dt = F(t) + c$,

[redacted] *Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:*

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx\ ;\ (\int f(x)dx)' = f(x).$$

□ Так как $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F'(x) = f(x)$, то $(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$. Но тогда

$$d(\int f(x)dx) = (\int f(x)dx)'dx = f(x)dx\ .\ \blacksquare$$

[redacted] *Неопределенный интеграл от производной некоторой функции равен этой функции, сложенной с произвольной постоянной:*

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C.$$

□ Так как $(F(x) + C)' = F'(x)$, то по определению неопределенного интеграла имеем $\int F'(x)dx = F(x) + C$. ■

Учитывая, что $F'(x)dx = dF(x)$, доказанное равенство можно записать в виде

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Таблица интегралов

1. $\int 0 \cdot dx = C$
2. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$
3. $\int x^n \cdot dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,$

   $n \neq -1,\ x > 0$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ |x| < |a|$
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C$
13. «Высокий» логарифм:

    $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,\ |x| \neq a$$
14. «Длинный» логарифм:

    $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

Установим, например, справедливость формулы

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

В самом деле, если $x>0$, то $|x| = x$ и, следовательно,

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Если же $x<0$, то $|x| = -x$ и, следовательно,

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Итак, $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, а, значит,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Методы интегрирования

1. ***Непосредственное интегрирование*** - метод при котором интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

2**. Метод замены переменной** (метод подстановки)

$$\int f(x)dx = \left| \begin{matrix} x = x(t) \\ dx = x'(t)dt \end{matrix} \right| = \int f\big(x(t)\big)x'(t)dt$$

$$\int f\big(u(x)\big)u'(x)dx = \left| \begin{matrix} u = u(x) \\ u'(x)dx = du \end{matrix} \right| = \int f(u)du$$

Методы интегрирования (продолжение)

3. ***Интегрирование по частям.***

Теорема 1. Если $u(x), v(x)$ дифференцируемые функции, то

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx\,.$$

Формула для запоминания: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

Замечание. Не интегрируются в элементарных функциях

Интеграл Пуассона $\int e^{-x^2}\,dx$;

Интегралы Френеля $\int \sin x^2 dx$, $\int \cos x^2 dx$;

Интегральный логарифм $\int \frac{dx}{\ln x}$;

Интегральные синус и косинус $\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int \frac{\cos x}{x} dx$

Интегрирование по частям

Пусть $U(x)$ и $V(x)$ - дифференцируемые функции. Тогда

$d(U(x)V(x)) = U(x)dV(x) + V(x)dU(x).$

Поэтому $U(x)dV(x) \quad = d(U(x)V(x)) - V(x)dU(x).$

Вычисляя интеграл от обеих частей, с учетом того, что

$\int d(U(x)V(x)) = U(x)V(x) + C$, получаем

$$\int U(x)dV(x) = UV - \int V(x)dU(x)$$

называемое формулой интегрирования по частям

Примеры. Сведение к табличному интегралу.

1. $$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2}{x^2} dx = \int \left(x^2 - 2x + 3\right) dx = \int x^2 dx - 2\int x dx +$$

$$+3\int dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C$$

2. $$\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 = \int \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) dx = \int dx - 2\int x^{-2} dx + \int x^{-4} dx =$$

$$x + 2x^{-1} - \frac{1}{3}x^{-3} + C = x + \frac{2}{x} - \frac{1}{3x^3} + C$$

3. $$\int ctg^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -ctgx - x + C$$

4. $$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$-ctgx + tgx + C$$

5. $$\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos x)dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos x dx =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C$$

Примеры. Замена переменной.

$$1.\ \int\sqrt{5x+3}\,dx=\left|\begin{array}{c}5x+3=t,\\ x=\dfrac{t-3}{5},\\ dx=\left(\dfrac{t-3}{5}\right)'dt=\dfrac{1}{5}dt\end{array}\quad или \left|\begin{array}{l}5x+3=t,\\ d(5x+3)=dt,\\ (5x+3)'dx=dt,\\ 5dx=dt,\ \ dx=\dfrac{1}{5}dt\end{array}\right|\right|=$$

$$=\int\sqrt{t}\cdot\frac{1}{5}dt=\frac{1}{5}\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{5}\cdot\frac{2t^{3/2}}{3}+C=\frac{2}{15}\sqrt{(5x+3)^3}+C.$$

$$2.\ \int \frac{dx}{3-4x} = \left| \begin{array}{c} 3-4x=t, \\ x=\dfrac{3-t}{4}, \\ dx=\left(\dfrac{3-t}{4}\right)' dt=-\dfrac{1}{4}dt \end{array} \right| = \int -\frac{dt}{4t} = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{4}\ln|t| + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|3-4x| + C.$$

$$3.\ \int \frac{\ln x}{x}dx = \left| \begin{array}{c} \ln x = t, \\ d(\ln x) = dt, \\ \dfrac{1}{x}dx = dt, \end{array} \right| = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

Примеры. Интегрирование по частям.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$I \text{ тип} \quad \int P_n(x) \begin{Bmatrix} e^x \\ \sin(x) \\ \cos(x) \end{Bmatrix} dx = \left| \begin{array}{l|l} P_n(x) = u & P_n'(x)\,dx = du \\ \begin{Bmatrix} e^x \\ \sin(x) \\ \cos(x) \end{Bmatrix} dx = dv & \begin{Bmatrix} e^x \\ -\cos(x) \\ \sin(x) \end{Bmatrix} = v \end{array} \right|$$

♦**Пример** $\int (x+3)\sin 4x\,dx$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x+3, \qquad du = dx \\ dv = \sin 4x\,dx \Rightarrow \\ v = \int \sin 4x\,dx = \{4x = t, 4dx = dt\} = \int \sin t \frac{dt}{4} = -\frac{1}{4}\cos t = -\frac{1}{4}\cos 4x \text{ т.е. } \quad v = -\frac{1}{4}\cos 4x \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 4x \cdot (x+3) - \int -\frac{1}{4}\cos 4x\,dx = -\frac{1}{4}\cos 4x \cdot (x+3) + \frac{1}{4}\int \cos 4x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 4x \cdot (x+3) + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x + c = -\frac{1}{4}\cos 4x \cdot (x+3) + \frac{1}{16}\sin 4x + c$$

2 тип

$\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$ за u принимаются соответственно функции $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, а за dv — выражение $P(x)\,dx$.

$$\int \ln x dx = \left\| \begin{matrix} u = \ln x & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = x \end{matrix} \right\| = x\ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

Интегрирование некоторых классов функций.

1. Интегрирование рациональных функций.

Рассмотрим интеграл вида $\int R(x)dx$, где $R(x)$ – рациональная функция. Всякое рациональное выражение $R(x)$ можно представить в виде $P(x)/Q(x)$ где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены. Если эта дробь неправильная, то ее можно представить в виде суммы многочлена (целой части) и правильной дроби.

Если эта дробь правильная, то в виде суммы простейших дробей вида

I. $\frac{A}{x-a}$,

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$ (k – целое положительное число $\geqslant 2$),

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ $\left(\text{корни знаменателя комплексные, т. е. } \frac{p^2}{4}-q<0\right)$.

IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ (k—целое положительное число $\geqslant 2$; корни

Интегрирование элементарных дробей

1. $\int \frac{A}{x+a}\,dx = A\ln|x+a| + c;$

2. $\int \frac{A}{(x+a)^k}\,dx = \frac{A}{(1-k)(x+a)^{k-1}} + c;$

3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c;$

4. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{A}{2(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}} +$

$$+\left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}.$$

$$\int \frac{x^3+6x^2+10x+10}{(x-1)(x+2)^3}dx =$$

$$\frac{x^3+6x^2+10x+10}{(x-1)(x+2)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2} + \frac{B_3}{(x+2)^3};$$

$$x^3+6x^2+10x+10 = Ax^3+6Ax^2+12Ax+8A+B_1x^3+3B_1x^2-4B_1+$$
$$+B_2x^2+B_2x-2B_2+B_3x-B_3;$$

$$x^3+6x^2+10x+10 = (A+B_1)x^3+(6A+3B_1+B_2)x^2+$$
$$+(12A+B_2+B_3)x+(8A-4B_1-2B_2-B_3);$$

$$\begin{cases} A+B_1=1, \\ 6A+3B_1+B_2=6, \\ 12A+B_2+B_3=10, \\ 8A-4B_1-2B_2-B_3=10, \end{cases} \quad \begin{cases} A=1-B_1, \\ -3B_1+B_2=0, \\ -12B_1+B_2+B_3=-2, \\ -12B_1-2B_2-B_3=2, \end{cases} \quad \begin{cases} A=1-B_1, \\ B_2=3B_1, \\ -9B_1+B_3=-2, \\ -18B_1-B_3=2, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad A=1, \quad B_1=0, \quad B_2=0, \quad B_3=-2.$$

$$= \int \frac{dx}{x-1} - 2\int \frac{dx}{(x+2)^3} = \ln|x-1| + \frac{1}{(x+2)^2} + C.$$

2. Интегрирование тригонометрических функций.

1. $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Универсальная тригонометрическая подстановка

$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

2. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ - нечетная по $\sin x$ -

подстановка $t = \cos x$

3. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ - нечетная по $\cos x$ -

подстановка $t = \sin x$

4. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ - четная по $\cos x$ и $\sin x$

подстановка $t = \operatorname{tg} x$

Найти интеграл $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$.

△ Подынтегральная функция рационально зависит от $\sin x$ и $\cos x$; применим подстановку $\operatorname{tg}(x/2) = t$, тогда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$ и

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C.$$

Возвращаясь к старой переменной, получим

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = -\frac{1}{\operatorname{tg}(x/2) + 2} + C. \ \blacktriangle$$