Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Гончарова И.В.

Производная функции

Определение производной функции.

Пусть $y = f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой её окрестности.
Придадим x_0 приращение Δx такое, что $x_0 + \Delta x \in D(f)$.
Функция при этом получит приращение

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) .$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Производной функции*** $y = f(x)$ ***в точке*** x_0 *называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента* Δx, *при* $\Delta x \to 0$ *(если этот предел существует и конечен), т.е.*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Обозначают: $y'(x_0)$, $\dfrac{dy(x_0)}{dx}$, $f'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на (a,b) и непрерывна в т. x_0 из этого промежутка (a,b). Тогда приращению Δx отвечает приращение

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) .$$

Если приращение Δy может быть представлено в виде :

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x), \text{ где } A=const,$$

α – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$, то функцию $f(x)$ называют дифференцируемой в точке x_0 .

$A \cdot \Delta x$ – дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0

Обозначают: $$dy = df(x_0) = A \cdot \Delta x$$

Теорема. Для того чтобы функция была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовала производная.

Следствие. $$dy = df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть существует производная $f'(x_0)$. По определению,

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = f'(x_0)$, но тогда $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = f'(x_0) + \alpha$, где

α- бесконечно малая при Δx→0. Значит,

$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x$ или $\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x$, где $A = f'(x_0)$.

Достаточность. Пусть $\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x$, где α- бесконечно малая при Δx→0. Тогда

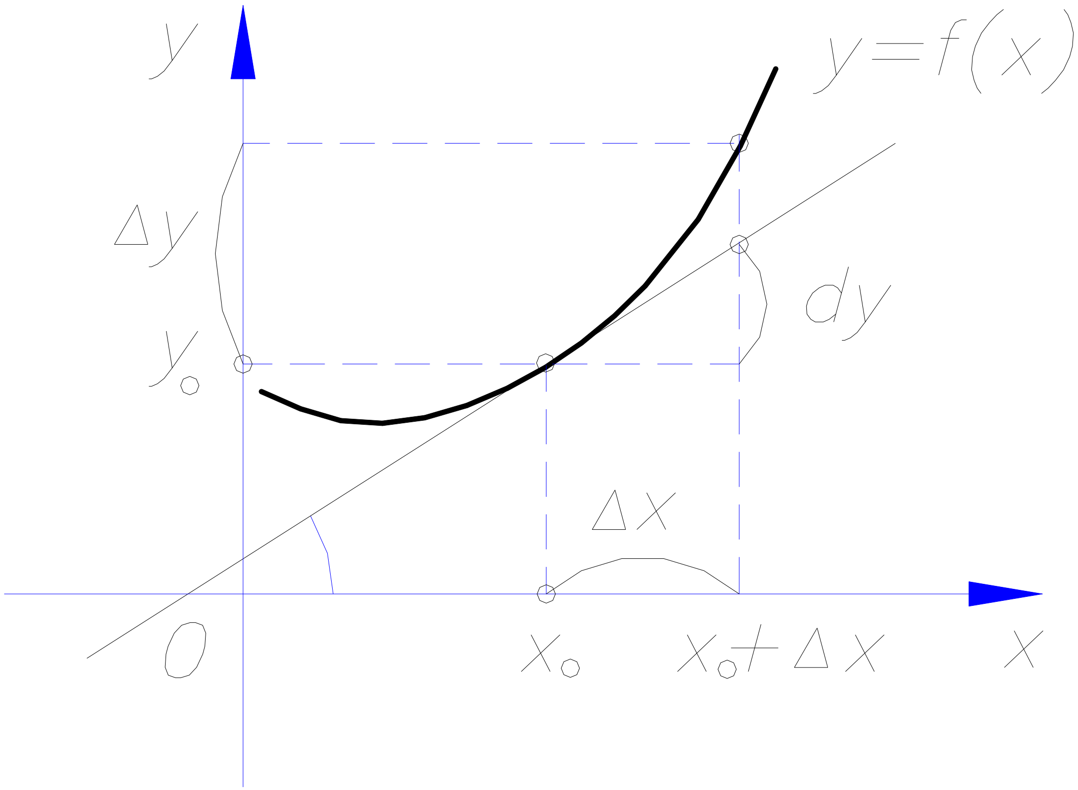
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha$, а поэтому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} =$ A.

Значит, производная в точке существует, причем $f'(x_0) = A$.

Геометрический смысл дифференциала

Дифференциал функции в точке равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции

в этой точке, соответствующему приращению аргумента.



Соответствие $x_0 \to f'(x_0)$ является функцией, определенной на множестве $D_1 \subseteq \mathrm{D}(f)$.

Операцию нахождения для функции $y = f(x)$ её производной функции называют ***дифференцированием функции*** $f(x)$.

Пример.

Производная квадратичной функции $f(x) = x^2$

1) $\forall x_0$ Δx $x_0 + \Delta x$

2) $f(x_0) = x_0{}^2$ $f\left(x_0 + \Delta x\right) = \left(x_0 + \Delta x\right)^2$

3) $\Delta f = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) = x_0{}^2 + 2x_0\Delta x + \left(\Delta x\right)^2 - x_0{}^2 = 2x_0\Delta x + \left(\Delta x\right)^2$

4) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x\left(2x_0 + \Delta x\right)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$

5) $\Delta x \to 0$ $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(2x_0 + \Delta x\right) = 2x_0$

Вывод: $\left(x^2\right)' = 2x$

Физический и геометрический смысл производной

1) **Физический смысл производной**.

Если функция $y = f(x)$ и её аргумент x являются физическими величинами, то *производная* $f'(x)$ – *скорость изменения величины* y *относительно величины* x.

ПРИМЕР.

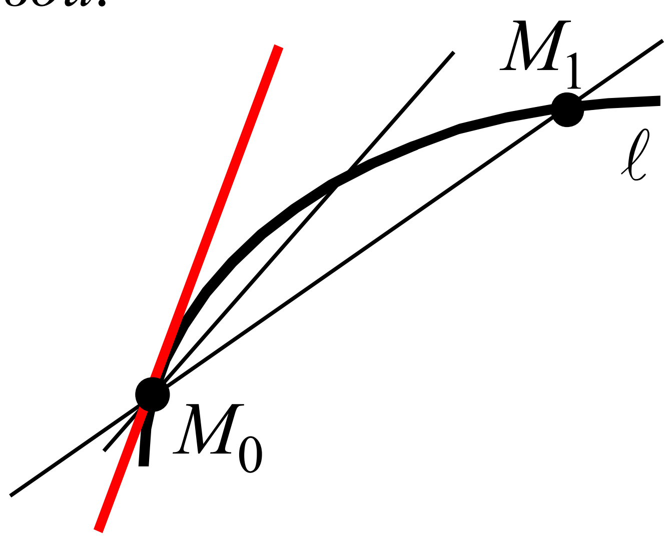
Пусть $S = S(t)$ – расстояние, проходимое точкой за время t. Тогда производная $S'(t_0)$ – *скорость в момент времени* t_0.

2) Геометрический смысл производной.

Пусть ℓ – некоторая кривая, M_0 – точка на кривой ℓ.

Любая прямая, пересекающая ℓ не менее чем в двух точках, называется ***секущей****.*

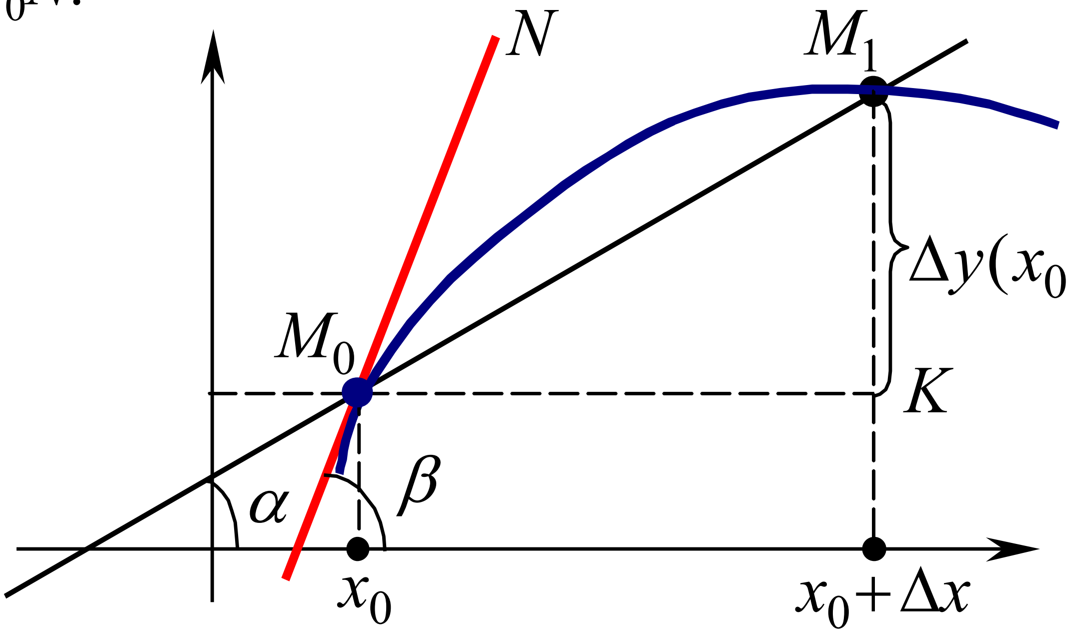
Касательной к кривой ℓ в точке M_0 *называется предельное положение секущей M_0M_1, если точка M_1 стремится к M_0, двигаясь по кривой.*



Очевидно, что если касательная к кривой в точке M_0 существует, то она единственная.

Рассмотрим кривую $y = f(x)$.

Пусть в точке $M_0(x_0\ ; f(x_0))$ она имеет невертикальную касательную M_0N.



Таким образом, получили: *$f\,'(x_0)$ – угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0\ ; f(x_0))$.*

(геометрический смысл производной функции в точке).

$\Rightarrow$Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0\ ; f(x_0))$ можно записать в виде

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

Правила дифференцирования

1) *Производная постоянной функции равна нулю*, т.е.

$$C' = 0, \quad \text{где } C \text{ – константа.}$$

2) *Производная суммы* (*разности*) *равна сумме* (*разности*) *производных*, т.е. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

3) *Производная произведения находится по правилу*:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

4) $(C \cdot u)' = C \cdot u'$, где C – константа.

Говорят: «постоянный множитель выносится за знак производной».

5) *Производная дроби находится по правилу*:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \qquad \bigl(v(x) \neq 0\bigr).$$

6) *Если функция* $\varphi(t)$ *имеет производную в точке* t, *а функция* $f(u)$ *имеет производную в точке* $u = \varphi(t)$, *то сложная функция* $y = f(\varphi(t))$ *имеет производную в точке* t, *причем*

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

(правило дифференцирования сложной функции).

7) ТЕОРЕМА (о производной обратной функции).

Пусть функция $y = f(x)$ *имеет производную в точке* x_0, *причем* $f'(x_0) \neq 0$. *Если существует обратная функция* $x = \varphi(y)$, *то она имеет производную в точке* $y_0 = f(x_0)$ *и*

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Доказательство правил нахождения производной суммы и производной произведения.

$$1.\quad (u+v)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x} = u'+v'$$

$$2.\quad (uv)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x)v(x_0+\Delta x)-uv}{\Delta x} =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} u(x_0+\Delta x) = u+\Delta u \\ v(x_0+\Delta x) = v+\Delta v \end{array}\right\} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta uv+\Delta vu+\Delta u\Delta v}{\Delta x} = u'v+v'u+u'\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v}_{=0} = u'v+v'u.$$

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^{α}	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$1/\cos^2 x$
$\operatorname{ctg} x$	$-1/\sin^2 x$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$1/x$
$\log_a x$	$1/(x \cdot \ln a)$
$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$\operatorname{arctg} x$	$1/(1+x^2)$
$\operatorname{arcctg} x$	$-1/(1+x^2)$

Производные высших порядков

Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть также функция от x и называется ***производной первого порядка***.

Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется ***производной второго порядка*** и обозначается:

$$y''; \quad f''(x); \quad \frac{d^2y}{dx^2}$$

Итак: $y'' = (y')'$

Производная от производной второго порядка, если она существует называется ***производной третьего порядка*** и обозначается:

$$y'''; \quad f'''(x); \quad \frac{d^3y}{dx^3}$$

Итак: $y''' = (y'')'$

Производной n – ого порядка (или n – ой производной) называется производная от производной n -1 - ого порядка.

$$\boxed{y^{(n)} = (y^{(n-1)})'}$$

Пример.

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{(2)} = -\sin x = \sin(x + \pi) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{(3)} = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), \dots,$$

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

§ Теоремы о среднем значении

для дифференцируемых функций

7.1. Условия монотонности функции

Теорема о монотонности функции на интервале	Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) и $f'(x)>0 \quad (f'(x)<0) \quad \forall x \in (a,b)$, то функция $f(x)$ возрастает (соответственно – убывает) на этом интервале. Если же $f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0) \quad \forall x \in (a,b)$, то функция $f(x)$ не убывает (соответственно, –не возрастает) на этом интервале, то есть $\forall x_1, x_2 \in (a,b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) \geq f(x_2)$).

Например, найдем интервалы возрастания и убывания функции $f(x) = (x-2)^2(x-1)$.

Функция определена на всей числовой прямой, а ее производная равна

$f'(x) = 2(x-2)(x-1) + (x-2)^2 = (x-2)(2x-2+x-2) = (x-2)(3x-4)$.

Функция $f(x)$ возрастает тогда и только тогда, когда $f'(x) > 0$, то есть

$(x-2)(3x-4) > 0$, откуда $x \in (-\infty, \frac{4}{3}) \cup (2, \infty)$.

Аналогично, данная функция убывает тогда и только тогда, когда $f'(x) < 0$, то есть

$(x-2)(3x-4) < 0$, откуда $x \in (\frac{4}{3}, 2)$.

Точки локального экстремума функции

7.2.

Определение точки локального максимума (локального минимума)	Точка x_0 называется точкой локального максимума (локального минимума), если существует такая окрестность $U_\delta(x_0)$ этой точки, что $f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in U_\delta(x_0), \quad x \neq x_0$ (соответственно $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in U_\delta(x_0), \quad x \neq x_0$).

Необходимое условие существования экстремума функции

7.3.

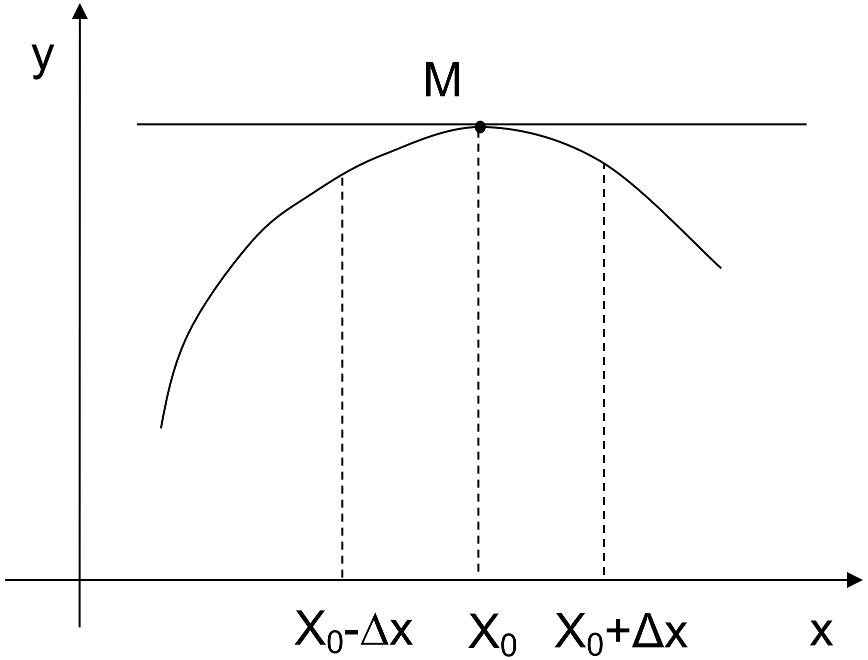
Определение точек локального экстремума	Точки локального максимума и минимума называются точками локального экстремума, а значения функции в этих точках – экстремумами функции.

7.4.

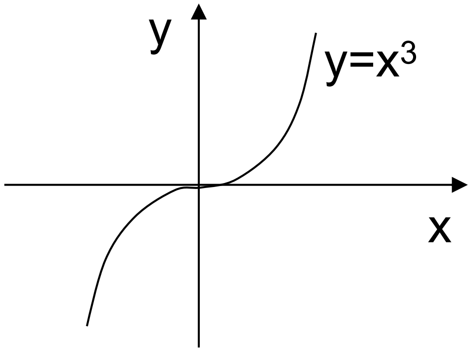
Теорема Ферма (необходимое условие экстремума)	Если x_0 - точка локального экстремума для функции $f(x)$, то в этой точке производная функции либо равна нулю ($f'(x_0)=0$), либо не существует.

Теорема Ферма

Геометрическая интерпретация



Замечание



Теорема Ролля

Пусть функция $y=f(x)$

а) непрерывна на отрезке $[a,\ b]$

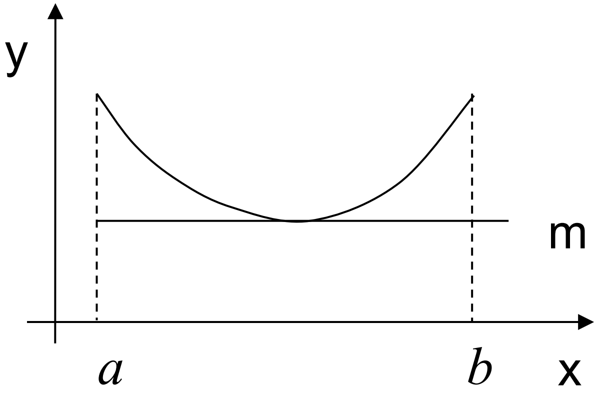
б) дифференцируема на интервале $(a,\ b)$

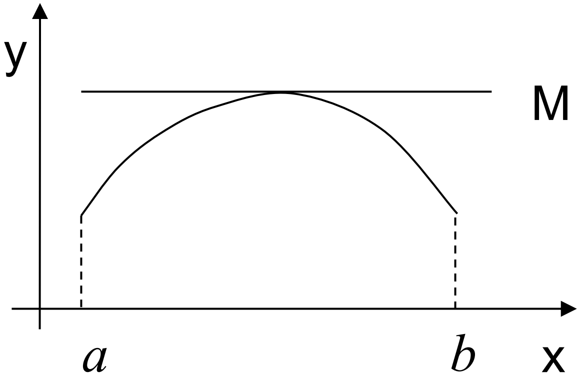
в) $f(\ a\ ) = f(\ b\ )$

Тогда найдется хотя бы одна точка $C \in (a,\ b)$, такая, что $f\ '(C) = 0$

Возможные случаи

$f(a)=f(b)>m$ или $f(a)=f(b)<M$





Теорема Лагранжа (о конечных приращениях)

Пусть функция $y = f(x)$

а) определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$

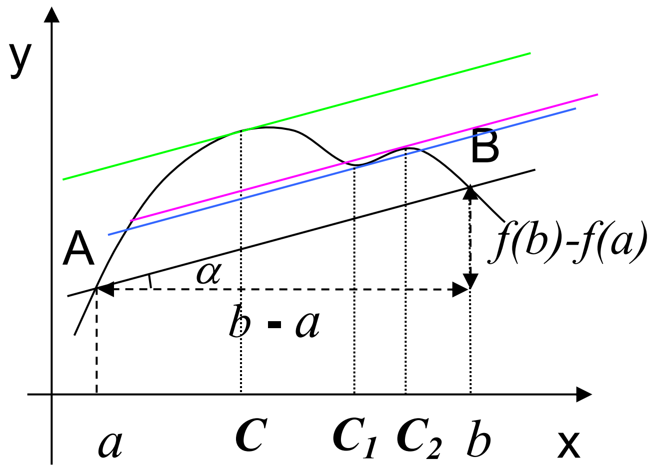
б) дифференцируема на интервале (a, b).

Тогда найдется хотя бы одна точка $C \in (a, b)$, такая, что

$$f'(C) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Геометрически

$$tg\alpha = f'(C)$$



Теорема Коши

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$

а) непрерывны на отрезке $[a, b]$

б) дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0.$

Тогда найдется хотя бы одна точка $C \in (a, b)$, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(C)}{g'(C)}$$

Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши

Теорема	Ролля	Лагранжа	Коши
Если	$f(x)$: 1. *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, 2. *дифференцируема на интервале* (a, b); 3. *принимает равные значения на концах отрезка,* *то есть* $f(a) = f(b)$,	$f(x)$: 1. *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, 2. *дифференцируема на интервале* (a, b),	$f(x)$ *и* $g(x)$: 1. *непрерывны на отрезке* $[a, b]$; 2. *дифференцируемы на интервале* (a, b); 3. $g'(x) \neq 0$ *во всех точках интервала* (a, b),
то	существует хотя бы одна точка ξ, $a < \xi < b$, что $f'(\xi) = 0$	существует хотя бы одна точка ξ, $a < \xi < b$, что $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$	существует хотя бы одна точка ξ, $a < \xi < b$, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

План отыскания наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$:

1. Найти производную первого порядка данной функции;
2. Найти **все** критические точки x_i, принадлежащие отрезку $[a,b]$; **в критических точках** первого порядка **производная** первого порядка исследуемой функции равна **нулю** или **бесконечности**, или **не существует**;
3. Вычислить $f(x_i)$ - значения функции во всех критических точках, оказавшихся на отрезке $[a,b]$, $i = 1,2,...n$;
4. Вычислить $f(a)$ и $f(b)$ - значения функции на концах отрезка;
5. Сравнить все полученные значения функции $f(x_i), f(a), f(b)$ и выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Теорема Лопиталя (правило Лопиталя)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки $x = a$ и $g'(x) \neq 0$ в окрестности $x=a$.

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ *и* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ и существует $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$,

то существует конечный предел $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Замечание 1. Если $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Лопиталя, в окрестности точки $x=a$, то правило Лопиталя применяется к отношению производных:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \text{ и т.д. } = A$$

Замечание 2. Правило Лопиталя применимо и в случае $x \to \infty$,т.е. если

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$

Теорема. (Правило Лопиталя для случая ∞/∞)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$

а) дифференцируемы в окрестности точки $x = a$

б) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$

в) $g'(x) \neq 0$ в окрестности $x = a$.

г) $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$

тогда существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Правило Лопиталя

3.2. К неопределенностям вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ можно преобразовывать также неопределенности вида $\{0\cdot\infty\}$, $\{\infty-\infty\}$, $\{1^\infty\}$, $\{0^0\}$, $\{\infty^0\}$.

3.3.

Вид неопределен ности	Действия	Результат действий ($c \neq 0, d \neq 0$ – постоянные)
$\{\infty-\infty\}$	1. дроби привести к общему знаменателю; 2. умножить и разделить разность функций на сопряженное выражение, если это разность квадратных корней; 3. умножить и разделить разность функций на неполный квадрат суммы этих функций, если это разность корней кубических; 4. преобразовать тождественно $f(x)-h(x)=\dfrac{\dfrac{1}{h(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)\cdot h(x)}}$	$\left\{\frac{c}{0}\right\}=\infty$; $\left\{\frac{c}{\infty}\right\}=0$; $\left\{\frac{0}{c}\right\}=0$; $\left\{\frac{\infty}{c}\right\}=\infty$; $\left\{\frac{c}{d}\right\}=A$ $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ - применить правило Лопиталя.

Правило Лопиталя

3.4.

Вид неопределенности	Действия	Результат действий
$\{0\cdot\infty\}$	Тождественно преобразовать произведение функций в отношения: $f(x)\cdot h(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{h(x)}}=\dfrac{h(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$	$\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$ - применить правило Лопиталя.

3.5.

Вид неопределенностей	Действия	Результат действий
$\left\{1^{\infty}\right\}$, $\left\{0^{0}\right\}$, $\left\{\infty^{0}\right\}$.	1. сначала прологарифмировать функцию, вычислить предел логарифма функции, а затем найти предел функции: $y=u^{v}\Rightarrow \ln y=v\ln u$; $\lim\limits_{x\to a}\ln y=A\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}y=e^{A}$. 2. использовать основное логарифмическое тождество, вычислить предел показателя экспоненты: $y=u^{v}=e^{v\cdot\ln u}$	См. выше

§ Формула Тейлора и Маклорена

Определение. Многочленом (полиномом) n - го порядка называется функция

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – коэффициенты многочлена, n – натуральные числа. Многочлен полностью определяется своими коэффициентами.

Определение. Многочленом (полиномом) по степеням $(x - x_0)$ называется функция

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n .$$

Определение. Формула

$$P(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

называется формулой Тейлора для многочлена $P_n(x)$.

Теорема.

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b), имеет в точке $x \in (a, b)$ производные до n - го порядка включительно. Тогда при $x \to x_0$ функция $f(x)$ сходится к своему многочлену Тейлора и можно записать

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + R_n(x).$$

Формула называется формулой Тейлора для функции $f(x)$.

Теорема.

Разность между функцией $f(x)$ и её многочленом Тейлора $P(x)$ является б.м. функцией высшего порядка малости по сравнению с $(x - x_0)^n$

$$f(x) - P(x) = R_n(x) = O\left((x - x_0)^n\right)$$

$R_n(x)$ - остаточный член

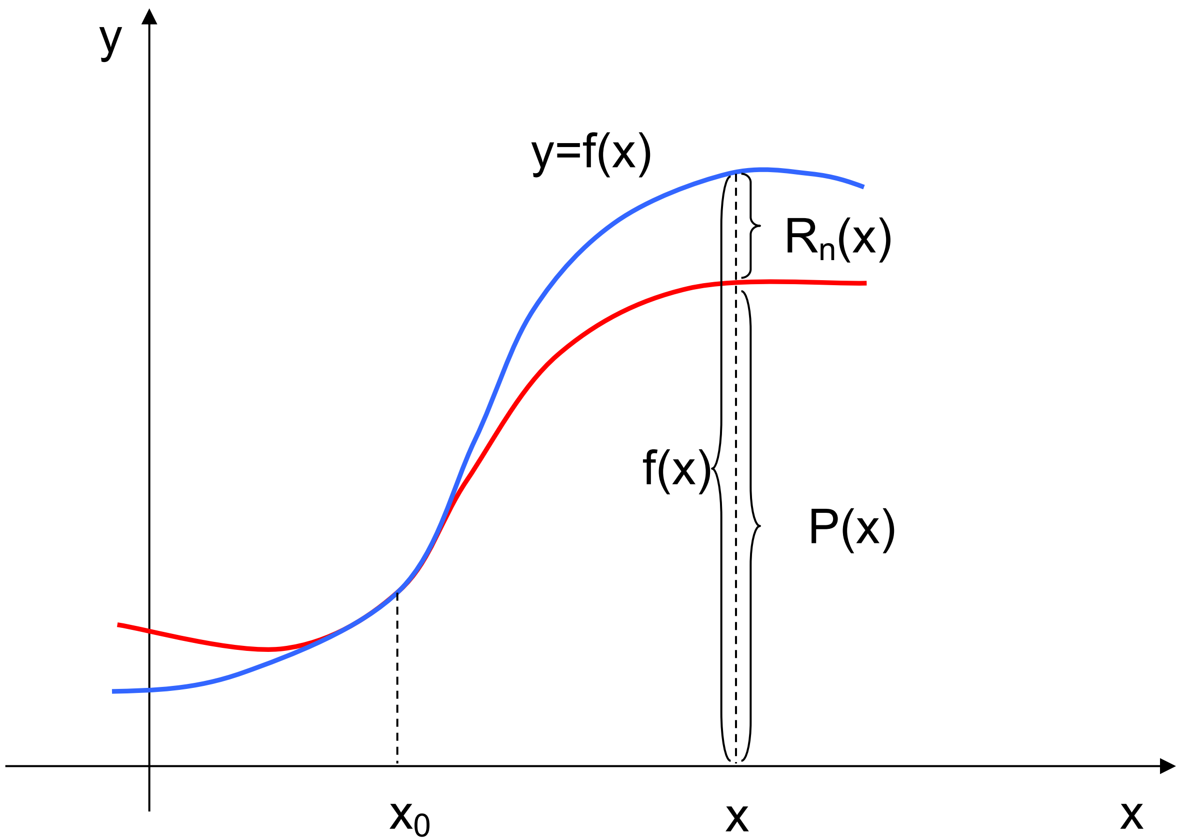
в форме Пеано $\quad R_n(x) = O\left((x - x_0)^n\right)$

в форме Лагранжа $\quad R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^n$, где $x_0 < \xi < x$

$$P(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

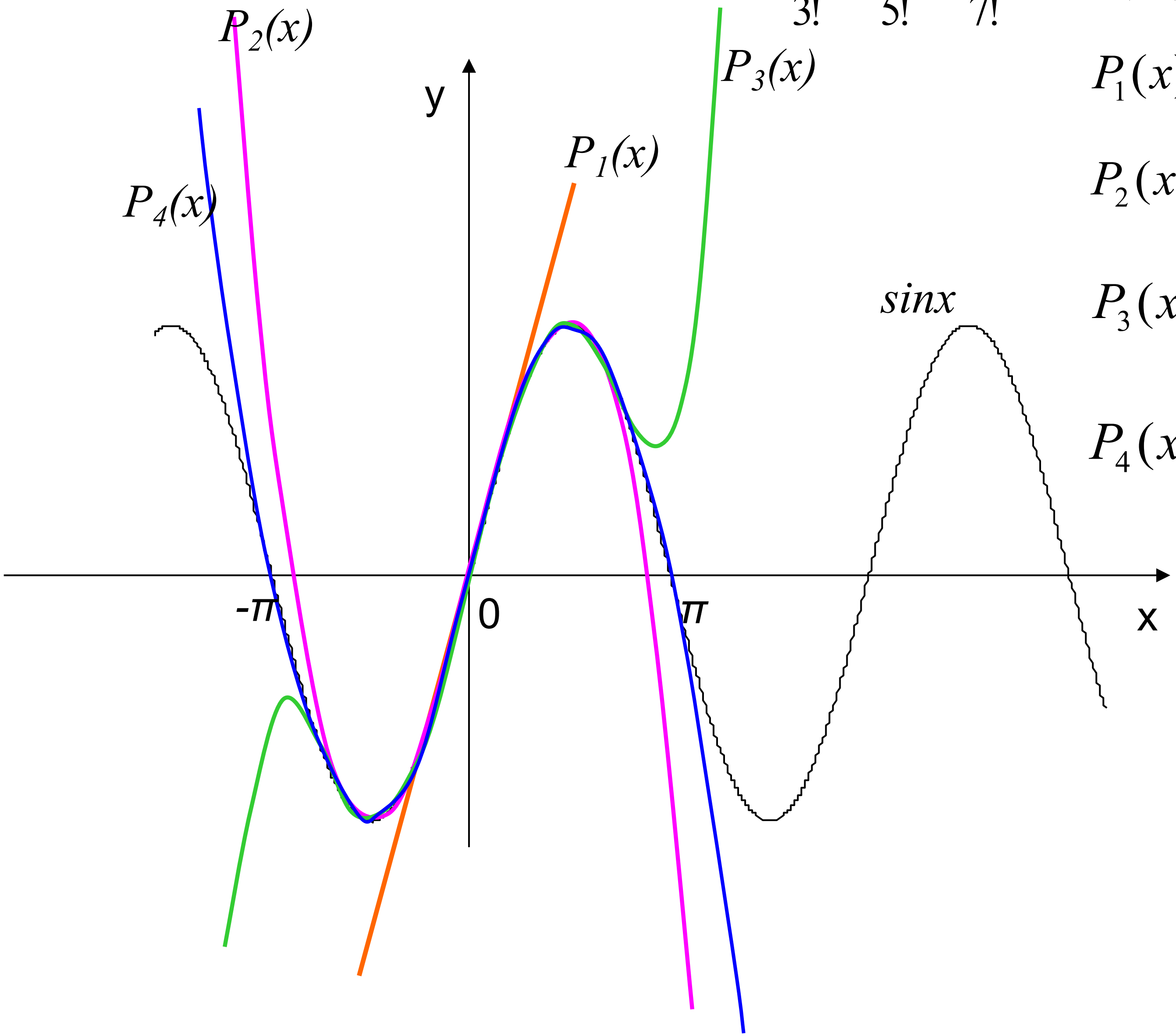
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + \ldots$$

$$f(x) = P(x) + R_n(x)$$



Формула Маклорена – частный случай формулы Тейлора при $x_0 = 0$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n(x)$$



$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$P_4(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

Стандартные разложения Маклорена

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_n$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n} + R_n$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n$$

Уметь получать разложения

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$sh\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

$$ch\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

§ ПОЛНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ

Определение. Функция $y=f(x)$ называется

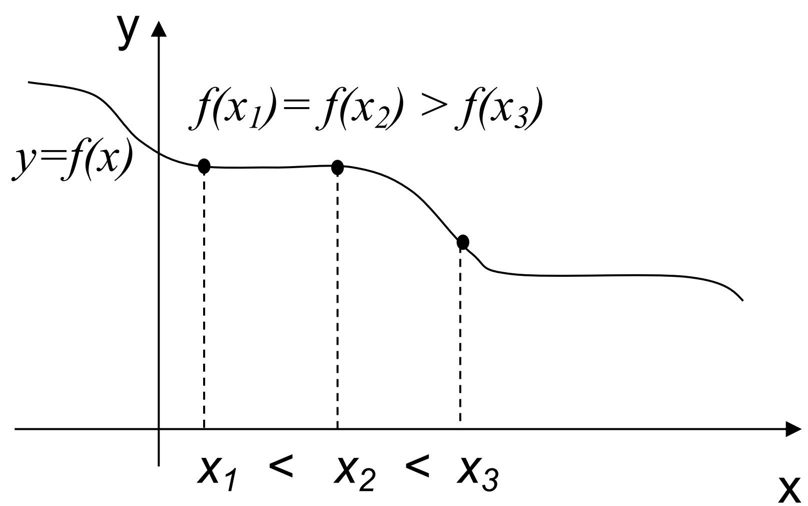
a) возрастающей на (a,b), если $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ при $x_1 < x_2$ $f(x_1)<f(x_2)$;

b) убывающей на (a,b), если $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ при $x_1 < x_2$ $f(x_1)>f(x_2)$;

c) невозрастающей на (a,b), если $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ при $x_1 < x_2$ $f(x_1)\geq f(x_2)$;

a) неубывающей на (a,b), если $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ при $x_1 < x_2$ $f(x_1)\leq f(x_2)$.

Пример невозрастающей функции

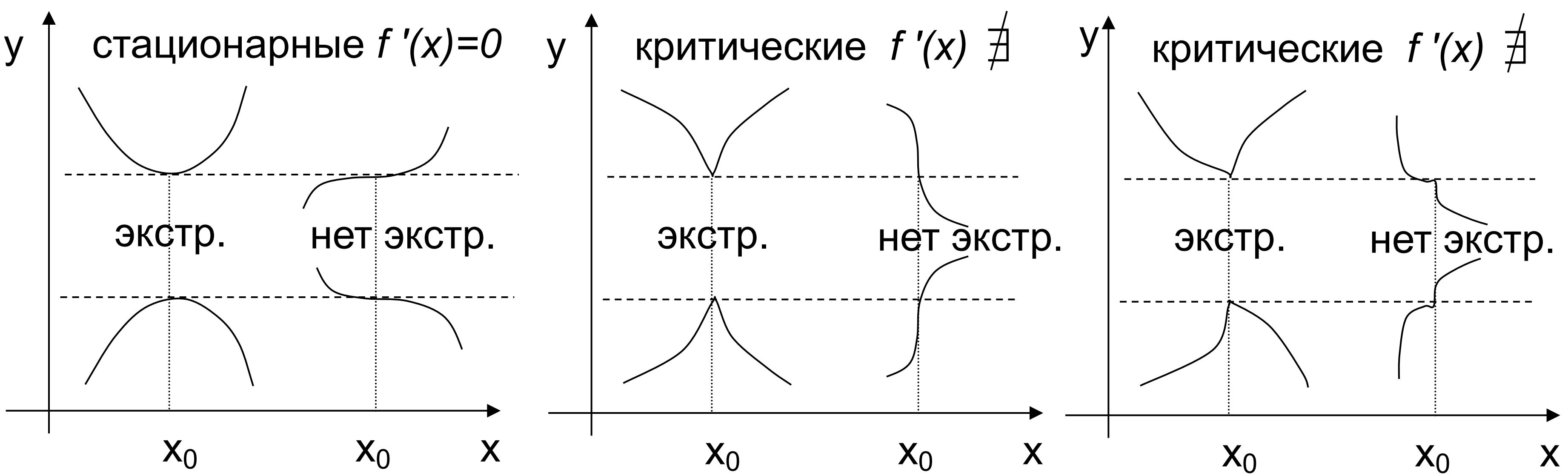


Определение. Говорят, что $f'(x)$ меняет знак в точке x_0, если существует окрестность точки x_0: $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, в которой при $x<x_0$ $f'(x)$ сохраняет один знак, а при $x>x_0$ – противоположный.

Определение. Точки, в которых $f'(x)=0$ называются стационарными точками.

Определение. Точки, в которых $f'(x)=0$ или не существует, называются критическими точками.

Возможные варианты стационарных и критических точек



Теорема. (1[ый] *Достаточный признак существования экстремума*)

Пусть $y=f(x)$ непрерывна в интервале, содержащем критическую точку x_0, дифференцируема во всех точках этого интервала, кроме может быть самой x_0, тогда

a) если при переходе слева направо через x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на «-», то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум;

b) если знак производной меняется с «-» на «+», то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимум.

Теорема. (*Второй достаточный признак существования экстремума*)

Если в критической точке x_0 функции $y=f(x)$ обращается в ноль не только первая производная, но и все последующие до (n-1)-й включительно, т.е.

$f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0,$ а $f^{(n)}(x_0)\neq 0,$

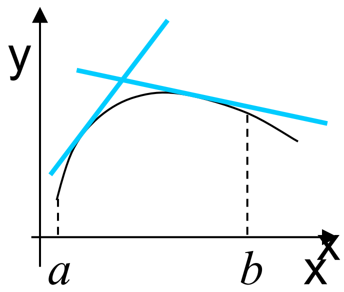
тогда x_0 будет точкой экстремума, если n – *четное*;

x_0 не будет точкой экстремума, если n – *нечетное*.

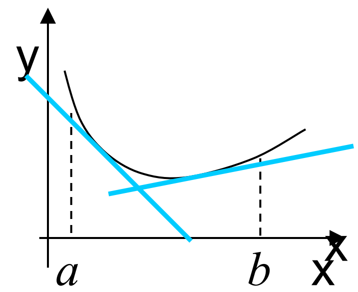
Характер экстремума определяется знаком $f^{(n)}(x_0)\neq 0.$

При $f^{(n)}(x_0)<0$ - в x_0 максимум, при $f^{(n)}(x_0)>0$ - в x_0 минимум.

Выпуклость, вогнутость, точки перегиба



Определение. Кривая обращена выпуклостью вверх на (a,b), если
все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на (a,b).
Кривая называется *выпуклой*.



Определение. Кривая обращена выпуклостью вниз на (a,b), если
все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале.
Кривая называется *вогнутой*.

Теорема. (*Достаточное условие выпуклости и вогнутости кривой*)

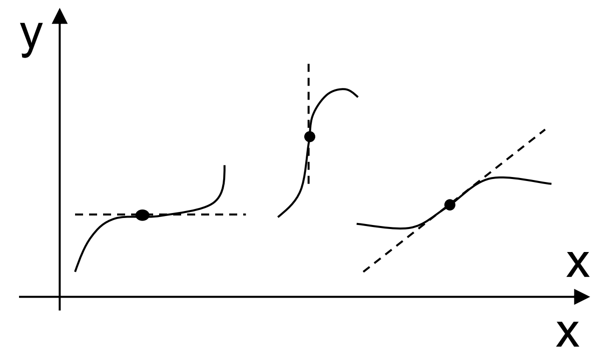
Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, и имеет в (a, b) производную до второго порядка включительно, тогда

a) если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции $f(x)$ отрицательна: $f''(x) < 0,$ то кривая на (a, b) выпукла;

b) если во всех точках интервала вторая производная положительна:

$f''(x) > 0,$ то кривая на (a, b) вогнута.

Определение. Точка $(x_0;y_0)$, лежащая на кривой $f(x)$, называется точкой перегиба функции $y=f(x)$, если существует окрестность точки x_0 такая, что при $x< x_0$ кривая лежит по одну сторону касательной, при $x > x_0$ - по другую сторону касательной.



Следствие из *достаточного условия выпуклости и вогнутости кривой.* (*Необходимое условие существования точки перегиба*)
Если вторая производная в некоторой точке x_0 равна нулю или не существует,
то эта точка есть точка перегиба графика функции.

Теорема. (*Достаточное условие существования точки перегиба*)

Пусть в точке x_0 выполнены необходимые условия существования точки перегиба, и пусть при переходе через эту точку $f''(x)$ меняет знак, тогда точка x_0 является точкой перегиба графика функции.

Общий план исследования функции и построения графиков

- D(y) – область непрерывности
- Найти, охарактеризовать точки разрыва, выделить вертикальные асимптоты
- Четность, нечетность
- Периодичность
- Промежутки возрастания, убывания; точки min, max
- Промежутки выпуклости, вогнутости; точки перегиба
- Наклонные асимптоты графика функции
- Дополнительные точки: 1) пересечение с осями координат
  2) $f(x_{min})$, $f(x_{max})$
  3) $f(x_{перегиб})$
- Построение графика функции