Последовательности. Предел последовательностей.

Доцент Гончарова И.В.

Определение последовательности.

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое действительное число, то говорят, что задана числовая последовательность; это число называют n-ым членом последовательности и обозначают $\mathbf{f_n}$.

Способы заданий последовательностей:

Аналитический.

Последовательность задается формулой n-го члена.

Например, $a_n = 3n^2 + 10$.

Используя эту формулу, находим $a_1=13$, $a_2=22$ и т.д.

Рекуррентный.

Способ, при котором любой член последовательности выражается через предыдущий (один или несколько).

Например, $a_1 = 3$, $a_{n+1}=a_n-2$.

По этим условиям, находим: $a_2=1$, $a_3=-1$ и т.д.

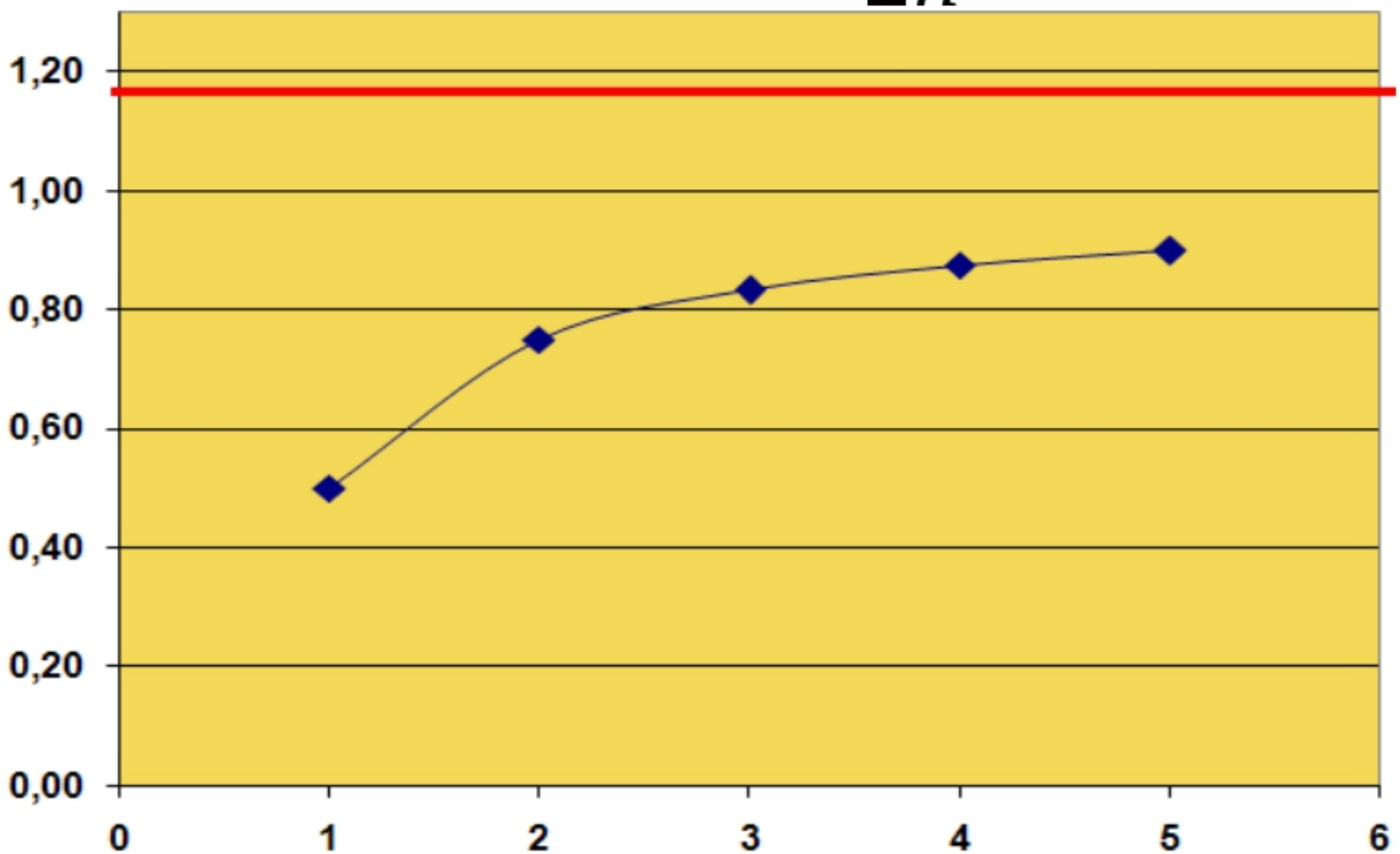
Свойства последовательностей.

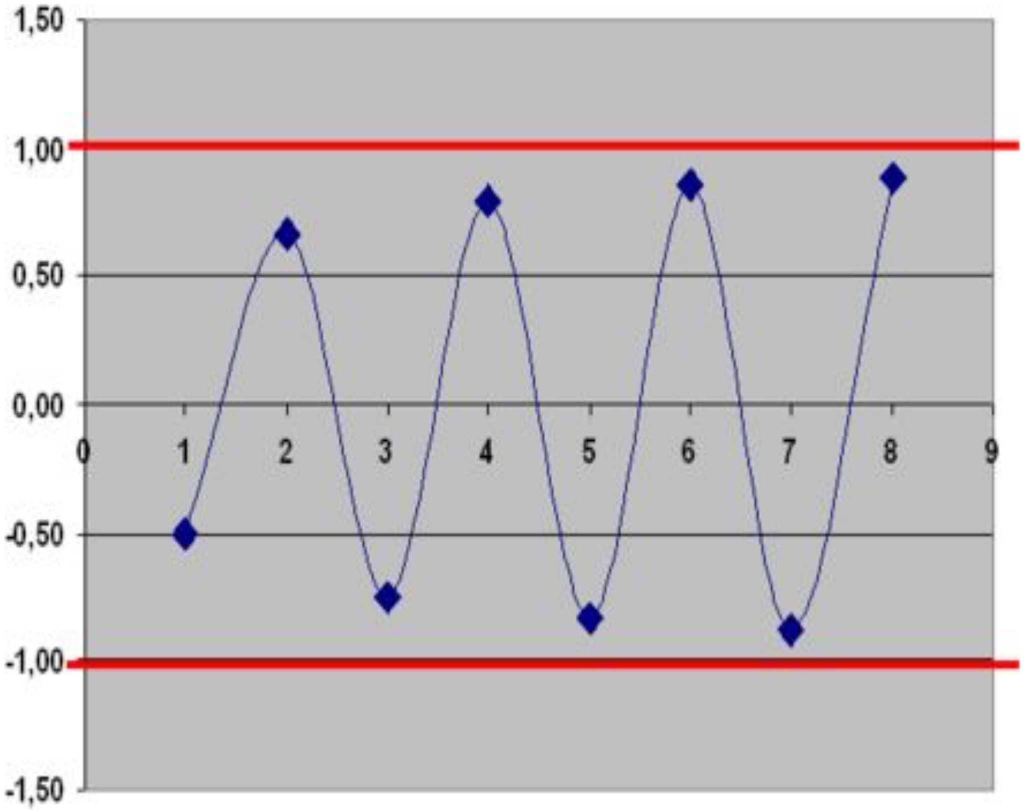
Определение. Последовательность y_n называется ограниченной сверху если существует число M, такое что $y_n \leq M$ для любого $n \in N$; число M называют верхней границей последовательности. Последовательность y_n называется ограниченной снизу, если существует число m , такое что $y_n \geq m$ для любого $n \in N$; число m называют нижней границей последовательности. Последовательность y_n называется ограниченной, если она ограничена и снизу и сверху.

Геометрический смысл ограниченности последовательности.

Каждый член последовательности можно изображать точками на координатной прямой. Если М – верхняя граница, m- нижняя граница, то каждый член последовательности будет лежать внутри отрезка [m; М].

$$a_n = 1 - \frac{1}{2n}$$





Пример. Построим график последовательности:

$$a_n = \left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1} \right\}$$

$$-\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ -\frac{3}{4};\ \frac{4}{5};\ldots$$

Если **последовательность** **ограничена сверху**, то она имеет **бесконечное множество верхних границ**. В самом деле, если $\boldsymbol{M}$- верхняя граница последовательности $\boldsymbol{y_n}$, т.е. $\boldsymbol{y_n} \leq \boldsymbol{M}$ для всех $\boldsymbol{n}$, то любое число $P>M$ также является верхней границей для $\boldsymbol{y_n}$. Аналогично, ограниченная снизу последовательность имеет бесконечное множество нижних границ.

Примеры. 1. Последовательность ***3, 2, 1, 0 ,-1, -2, -3,…*** ограничена сверху (например, числом 3)

2. Последовательность ***1,2,3,4,5,…,n,…*** ограничена снизу (например, числом 1)

3. Последовательность ***1, 1/2, 1/3, 1/4, …1/n,…*** ограничена и сверху (например, числом 1) и снизу (например, числом 0), т.е. является ограниченной.

4. Последовательность ***c, c, c, …, c, …*** (стационарная последовательность является ограниченной.

Теорема 1. Последовательность y_n является ограниченной тогда и только тогда, когда существует число $r>0$ такое , что $|\, y_n \,| \leq r$ для всех n.

Теорема 2. Свойство ограниченности последовательности (сверху, снизу, с двух сторон) не нарушится, если отбросить конечное число членов последовательности или, напротив, к данной последовательности добавить некоторое конечное число членов.

Доказательство теоремы 2.

Если последовательность ограничена, т.е. целиком лежит внутри некоторого интервала **(-*r*, *r*)** , то последовательность, полученная из данной отбрасыванием конечного числа членов, лежит внутри того же интервала, т.е. ограничена.

Если к ограниченной последовательности, лежащей внутри интервала **(-*r*, *r*) ,** добавить конечное число членов, то при необходимости всегда можно увеличить заданный интервал до интервала **(-*R*, *R*)** так, чтобы все приписанные члены оказались внутри большего интервала, т.е. последовательность ограничена.

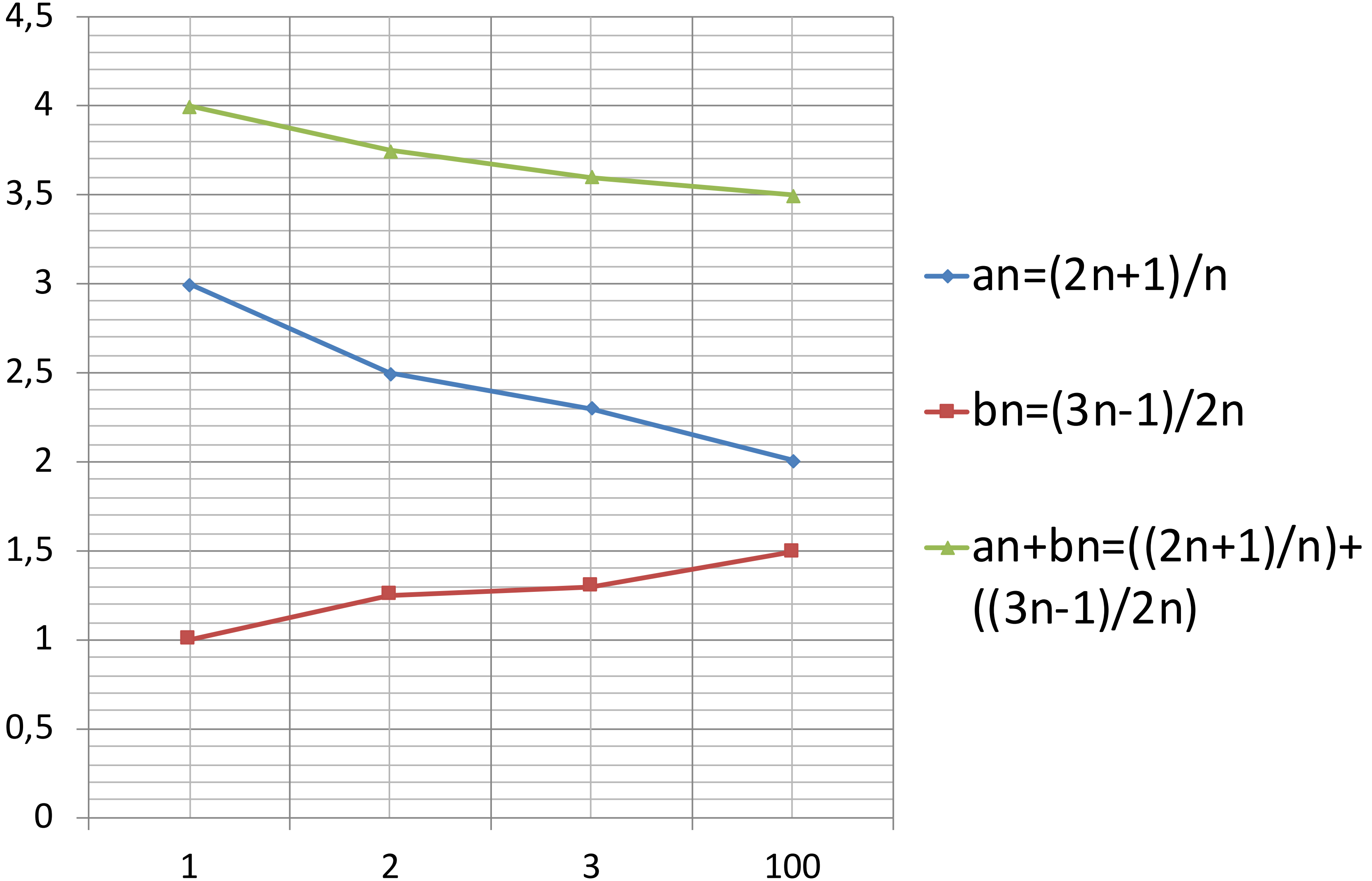
Над последовательностями можно осуществлять арифметические операции. Например, суммой последовательностей (x_n) и (y_n) называется последовательность (z_n) такая, что $z_n = x_n + y_n$. Аналогично определяют разность, произведение и частное последовательностей.

Теорема 3. *Если (x_n) и (y_n) — ограниченные последовательности, то их сумма также является ограниченной последовательностью.*

□ Так как последовательность (x_n) ограничена, то по теореме 1 существует число $r_1 > 0$ такое, что $|x_n| < r_1$ при всех n. Аналогично, в силу ограниченности последовательности (y_n) существует число $r_2 > 0$ такое, что $|y_n| < r_2$ при всех n.

Пусть $z_n = x_n + y_n$. Тогда $|z_n| = |x_n + y_n| \leqslant |x_n| + |y_n| < r_1 + r_2$

Полагая $r = r_1 + r_2$, для последовательности (z_n) имеем $|z_n| < r$ при всех n. Это и означает ограниченность последовательности (z_n). ■


4,5
4
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
1
2
3
100
an=(2n+1)/n
bn=(3n-1)/2n
an+bn=((2n+1)/n)+((3n-1)/2n)

Определение.

Последовательность (a_n) называется *возрастающей* (*неубывающей*), если $a_n < a_{n+1}$ ($a_n \leqslant a_{n+1}$) для любого n, и *убывающей* (*невозрастающей*), если $a_n > a_{n+1}$ ($a_n \geqslant a_{n+1}$) для любого n.

Примеры. 5. Последовательность $1/2, 2/3, 3/4, 4/5, \ldots, n/n+1, \ldots$ является возрастающей.

6. Последовательность $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots, 1/n, \ldots$ является убывающей.

Возрастающие и убывающие последовательности называются *монотонными* последовательностями.

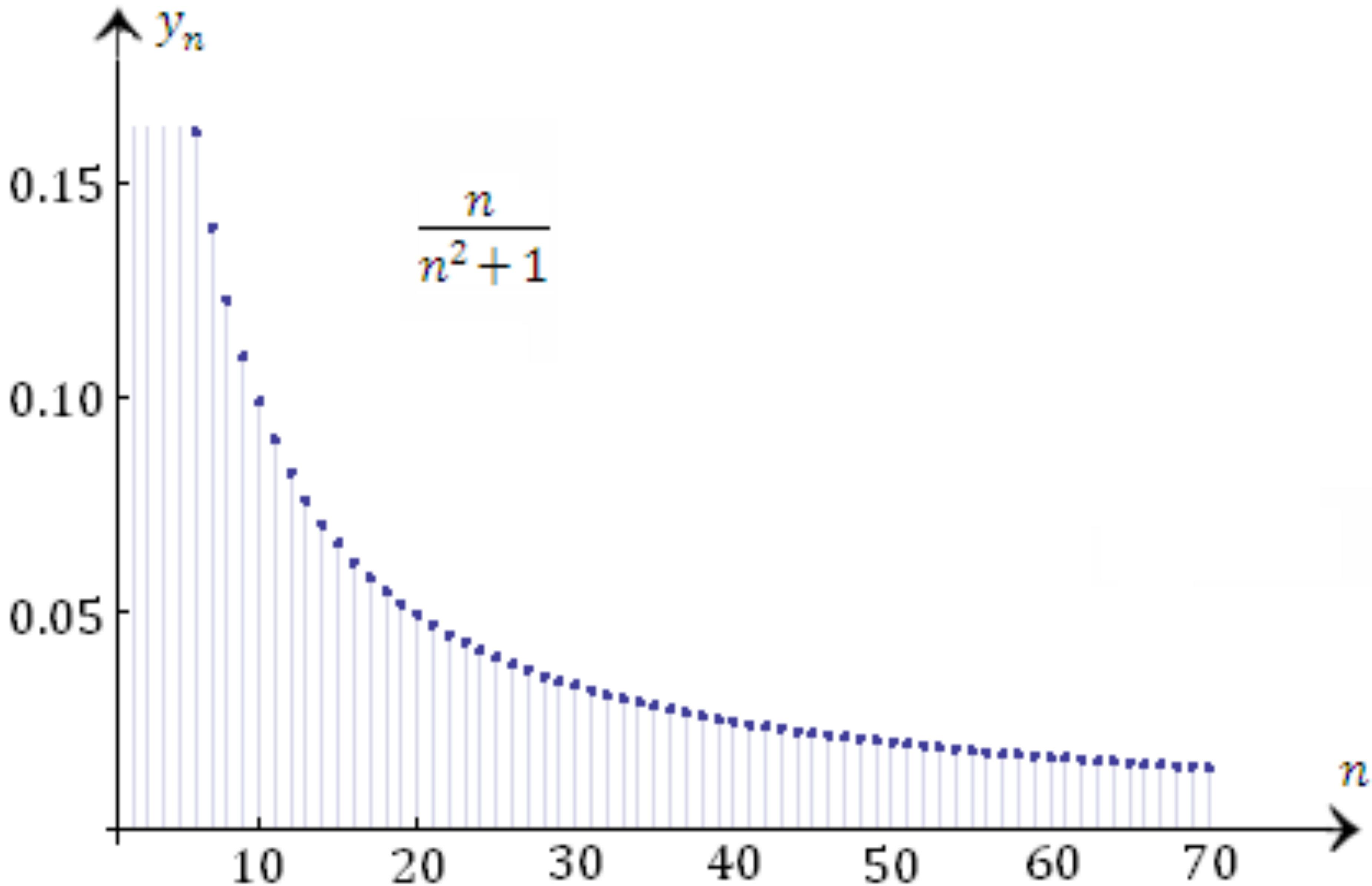
Бесконечно малые последовательности.

Определение. Последовательность α_n – называется бесконечно малой, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N, начиная с которого каждый член последовательности α_n по модулю меньше ε.

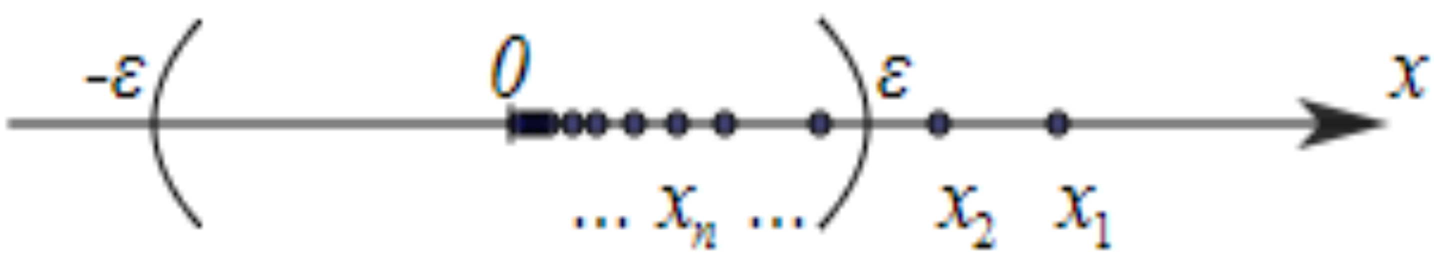
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n \geqslant N)|\alpha_n| < \varepsilon.$$

$$x_n = \frac{1}{n}$$

Возьмем число $\varepsilon_1 = 0{,}01$. Замечаем, что $|x_n| < 0{,}01$ при $n \geqslant 101$


y_n
0.15
0.10
0.05
$\frac{n}{n^2+1}$
n
10
20
30
40
50
60
70

Члены последовательности (α_n) можно изобразить точками на координатной прямой. Если некоторый член α_n последовательности удовлетворяет неравенству $|\alpha_n| < \varepsilon$ или, что то же самое, неравенству $-\varepsilon < \alpha_n < \varepsilon$, то он лежит внутри интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$; если неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$ выполняется для всех $n \geqslant N$, то член последовательности с номером N и все следующие за ним лежат внутри интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Таким образом, можно дать следующее геометрическое истолкование бесконечно малой последовательности: *какой бы интервал $(-\varepsilon, \varepsilon)$ мы ни взяли, вся последовательность начиная с номера N лежит внутри этого интервала.*



Свойства бесконечно малых последовательностей.

1. Стационарная последовательность с,с,с,… является бесконечно малой тогда и только тогда, когда с=0.
2. Свойство последовательности быть бесконечно малой не нарушится, если отбросить конечное число членов последовательности, или, напротив, приписать к данной последовательности конечное число членов.
3. Если β_n - бесконечно малая последовательность и для всех n выполняется неравенство $|\alpha_n| \leqslant |\beta_n|$, то и α_n –бесконечно малая последовательность.
4. Бесконечно малая последовательность является ограниченной.

Доказательство свойства 4.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как последовательность α_n -бесконечно малая, то $|\alpha_n| < \varepsilon$ для всех n, начиная с некоторого номера N. Если последовательность α_n рассматривать только начиная с номера N, то она является ограниченной. Тогда и вся последовательность α_n ограниченна.

5. Сумма двух бесконечно малых последовательностей есть также бесконечно малая последовательность.

Доказательство. Пусть α_n , β_n – бесконечно малые последовательности. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Тогда существует номер N_1, начиная с которого выполняется неравенство $|\alpha_n|<\varepsilon/2$, и существует номер N_2 , начиная с которого выполняется неравенство $|\beta_n|<\varepsilon/2$.

Рассмотрим последовательность γ_n такую что $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$. Имеем $|\gamma_n| = |\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n|$.

Тогда для $n\geq N$ получим $|\gamma_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, а это означает, что γ_n – бесконечно малая последовательность.

6. Если α_n - бесконечно малая последовательность, а y_n – ограниченная последовательность, то их произведение является бесконечно малой последовательностью.

<u>Доказательство</u>. Так как y_n – ограниченная последовательность, то существует $r>0$ такое, что $|y_n|<r$ для всех $n \geq N$.

Возбмем произвольное $\varepsilon>0$. Поскольку α_n - бесконечно малая последовательность, существует номер N, начиная с которого выполняется неравенство $|\alpha_n|<\varepsilon/r$.

Рассмотрим последовательность x_n такую что $x_n = y_n \cdot \alpha_n$.

Имеем $|x_n| = |y_n \cdot \alpha_n| = |y_n| \cdot |\alpha_n| < r \cdot \varepsilon/r = \varepsilon$ для всех $n \geq N$. Итак, $|x_n| < \varepsilon$. Следовательно, x_n - бесконечно малая последовательность.

Следствие 1. Если α_n – бесконечно малая последовательность, то последовательность $c\cdot\alpha_n$, где c- любое действительное число, также является бесконечно малой.

Следствие 2. *Произведение двух и вообще любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Следствие 3. *Если* (α_1), (α_2), (α_3), ..., (α_n) — *бесконечно малые последовательности, то и последовательность* (β_n) *такая, что* $\beta_n = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + \ldots + c_n\alpha_n$, *где* c_1, c_2, c_3, ..., c_n — *действительные числа, также является бесконечно малой.*

Так, выше мы отмечали, что $\left(\frac{1}{n}\right)$ — бесконечно малая последовательность. Тогда бесконечно малыми являются и такие последовательности: $\left(\frac{5}{n}\right)$ (согласно следствию 1); $\left(\frac{1}{n^4}\right)$ (согласно следствию 2, так как $\frac{1}{n^4} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$); $\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ (в силу свойства 3^0, поскольку $\frac{1}{n\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{n}$ для всех n); $\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{3}{n^3} + \frac{\sqrt{2}}{n^4}\right)$ (согласно следствию 3).

Предел числовой последовательности.

Определение «на языке бесконечно малых».

Число b называют пределом последовательности x_n , если $(x_n - b)$ – бесконечно малая последовательность.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$

Говорят также, что последовательность $\mathbf{x_n}$ сходится. Если последовательность не имеет предела, то ее называют

$$\lim_{n\to\infty} c = c, \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0,$$

где (α_n) — бесконечно малая последовательность.

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n+2}=\dfrac{2}{3}$.

○ Рассмотрим последовательность (α_n) такую, что $\alpha_n=\dfrac{2n+1}{3n+2}-\dfrac{2}{3}$. Имеем $\alpha_n=\dfrac{6n+3-6n-4}{3(3n+2)}=-\dfrac{1}{9n+6}$. Поскольку $(\alpha_n)=\left(\dfrac{-1}{9n+6}\right)$ — бесконечно малая

, это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n+2}=\dfrac{2}{3}$. ●

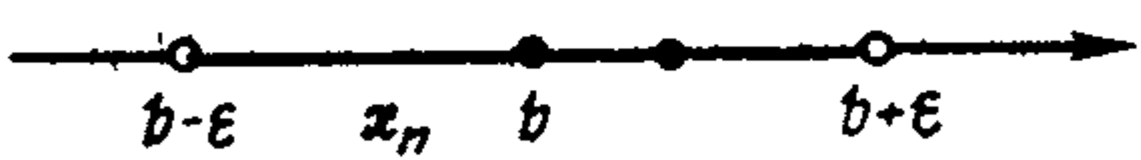
Определение на языке «ε-N».

Число **а** называется пределом последовательности $\mathbf{x_n}$, если для любого $\boldsymbol{\varepsilon>0}$ существует номер N, начиная с которого выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N} \mid \forall n > N\ |x_n - a| < \varepsilon$$

Определение «на языке окрестностей».

Число b называется пределом последовательности x_n , если какую бы ε-окрестность точки b мы ни взяли, все члены последовательности, начиная с некоторого номера N



1.

Теорема 1. Если последовательность сходится, то только к одному пределу.

<u>Доказательство.</u> Пусть последовательность $\mathbf{x_n}$ сходится. Предположим, что ее предел не является единственным, т.е. что одновременно верны равенства $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = c, b \neq c$

Воспользуемся определением на «языке бесконечно малых». Равенство $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ означает, что $\mathbf{x_n = b+\alpha_n}$, а равенство $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$ - что $\mathbf{x_n = c+\beta_n}$, где $\mathbf{\alpha_n}$ и $\mathbf{\beta_n}$ - бесконечно малые последовательности.

Тогда $\mathbf{b+\alpha_n = c+\beta_n}$, откуда $\mathbf{\alpha_n - \beta_n = c-b}$. Но последовательность $\mathbf{\alpha_n - \beta_n}$ - бесконечно малая. Значит стационарная последовательность **c-b** – бесконечно малая, а это возможно лишь тогда, когда **c=b**. Получено противоречие.

Теорема 2. Если последовательность сходится, то она ограничена.

Доказательство. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, воспользуемся определением на «языке бесконечно малых». Имеем $\mathbf{x_n = b+\alpha_n}$ **,** где $\boldsymbol{\alpha_n}$ - бесконечно малая последовательность. Стационарная последовательность **b** и бесконечно малая последовательность $\boldsymbol{\alpha_n}$ являются ограниченными, тогда и их сумма также ограничена.

Теорема 3 (о предельном переходе в неравенствах). *Если последовательности (x_n) и (y_n) сходятся и $x_n \leqslant y_n$ для всех n, то* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n \to \infty} y_n$.

□ Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = b$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = c$. Воспользуемся определением «на языке $\varepsilon - N$». Предположим противное, что $b > c$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $c + \varepsilon < b - \varepsilon$.

Поскольку $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = b$, существует номер N_1, начиная с которого выполняется неравенство $|x_n - b| < \varepsilon$, или, что то же самое,

$$b - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon. \tag{3}$$

Аналогично, так как $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = c$, то существует номер N_2, начиная с которого выполняется неравенство $|y_n - c| < \varepsilon$, или, что то же самое,

$$c - \varepsilon < y_n < c + \varepsilon. \tag{4}$$

Обозначим наибольшее из чисел N_1, N_2 через N. Тогда при $n \geqslant N$ будут выполнены неравенства (3) и (4). Поэтому $y_n < c + \varepsilon < b - \varepsilon < x_n$, т. е. $x_n > y_n$, что противоречит условию $x_n \leqslant y_n$ для всех n. Таким образом, сделанное предположение неверно и, значит, $b \leqslant c$. ■

Теорема 4. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = b$ *и для всех* n *справедливо неравенство* $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

□ Воспользуемся определением «на языке $\varepsilon - N$». Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, то начиная с некоторого номера N_1 будет выполнено неравенство $|x_n - b| < \varepsilon$, или, что то же самое,

$$b - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon. \tag{5}$$

Аналогично, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = b$, начиная с некоторого номера N_2 будет выполнено неравенство $|z_n - b| < \varepsilon$, или, что то же самое,

$$b - \varepsilon < z_n < b + \varepsilon. \tag{6}$$

Обозначив через N наибольший из номеров N_1, N_2, получим, что для всех $n \geqslant N$ будет выполнены неравенства (5) и (6). Воспользовавшись ими и заданным неравенством $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, получим $b - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < b + \varepsilon$, откуда $b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$, или, что то же самое, $|y_n - b| < \varepsilon$.

Итак, мы доказали следующее:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n \geqslant N)\, |y_n - b| < \varepsilon,$$

а это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. ■

Вычисление пределов.

Арифметические операции.

Теорема 5. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. *Тогда:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$ (*если* $b \neq 0$).

Примеры. 1. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-5n+4}{2n^2-3n+7}$.

○ Разделив почленно числитель и знаменатель n-го члена заданной последовательности на n в наивысшей из имеющихся в числителе и знаменателе степеней, т. е. на n^2, получим

$$\frac{n^2-5n+4}{2n^2-3n+7}=\frac{1-\dfrac{5}{n}+\dfrac{4}{n^2}}{2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{7}{n^2}}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-5n+4}{2n^2-3n+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{5}{n}+\dfrac{4}{n^2}}{2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{7}{n^2}}=$$

$$=\frac{1-5\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+4\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{2-3\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+7\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}=\frac{1-5\cdot 0+4\cdot 0}{2-3\cdot 0+7\cdot 0}=\frac{1}{2}. \quad ●$$

Признаки существования предела последовательности.

Теорема 6. Если последовательность возрастает (хотя бы в нестрогом смысле) и ограничена сверху , то она сходится.

Теорема 7. Если последовательность убывает и ограничена снизу, то она сходится.

Число e.

Теорема 8. *Последовательность* $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *сходится.*

□ Рассмотрим сначала вспомогательную последовательность $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Докажем, что она убывает, т. е. что $y_n > y_{n+1}$ для любого n. Имеем $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $y_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$; поэтому

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} : \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} = \frac{(n+1)^{2n+3}}{n^{n+1}\cdot(n+2)^{n+2}} =$$

$$= \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n+2} = \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n+2} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n+2}.$$

Применим к выражению $\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1}$ неравенство Бернулли $(1+x)^n >$ $> 1+nx$ для случая, когда $x=\frac{1}{n^2+2n}$. Получим

$$\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)\frac{1}{n^2+2n} > 1+(n+1)\frac{1}{n^2+2n+1} =$$

$$= 1+\frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}.$$

Тогда $\frac{y_n}{y_{n+1}} > \frac{n+2}{n+1}\frac{n+1}{n+2}$. Значит, $\frac{y_n}{y_{n+1}} > 1$, т. е. $y_n > y_{n+1}$.

Докажем теперь, что последовательность (y_n) ограничена снизу. Снова воспользуемся неравенством Бернулли: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)\cdot\frac{1}{n} > 2$. Следовательно, для любого n имеем $y_n > 2$; значит, последовательность (y_n) ограничена снизу.

Итак, последовательность (y_n) убывает и ограничена снизу; поэтому в силу теоремы 7 она сходится. Тогда сходится и последовательность (x_n).

В самом деле,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}{1} = \lim_{n\to\infty} y_n. \blacksquare$$

Бесконечно большие последовательности.

Определение. Последовательность x_n называют бесконечно большой, если для любого P>0 существует номер N, начиная с которого каждый член последовательности по модулю больше P.

$$(\forall P>0)(\exists N)(\forall n \geqslant N)|x_n| > P.$$

Для бесконечно большой последовательности (x_n) используется следующая условная запись: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$.

Теорема 9. *Для того чтобы последовательность* (x_n) *была бесконечно большой, необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $a_n = 1/x_n$ *была бесконечно малой.*

Теорема 10. *Если* (x_n) *— бесконечно большая последовательность, а* (y_n) *— сходящаяся последовательность, не являющаяся бесконечно малой, то их произведение есть бесконечно большая последовательность.*