

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>	<b>5</b>
<b>1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ПОСТОЯННЫЙ ТОК ...ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА.</b>	
<b>1.1. Электростатическое поле в вакууме .....</b>	<b>6</b>
1.1.1. Электрический заряд. Закон сохранения электрического заряда....	6
1.1.2. Взаимодействие электрических зарядов в вакууме.Закон Кулона..	8
1.1.3. Электростатическое поле. Напряженность поля.....	8
1.1.4. Сложение электростатических полей. Принцип суперпозиции .....	9
1.1.5. Электростатическое поле диполя .....	9
Контрольные ворпосы. Упражнения .....	13
<b>1.2. Теорема Остроградского – Гаусса.....</b>	<b>12</b>
1.2.1. Силовые линии электростатического поля.....	12
1.2.2. Поток вектора напряженности.....	13
1.2.3. Теорема Остроградского – Гаусса .....	14
1.2.4. Дифференциальная форма теоремы Остроградского – Гаусса.....	19
1.2.5. Вычисление электрических полей с помощью теоремы Остроградского – Гаусса .....	18
Контрольные вопросы. Упражнения.....	26
<b>1.3. Потенциальная энергия и работа электростатического поля.</b>	
<b>Связь напряженности с потенциалом .....</b>	<b>25</b>
1.3.1. Работа сил электростатического поля .....	25
1.3.2. Потенциальная энергия.....	27
1.3.3. Потенциал. Разность потенциалов.....	28
1.3.4. Связь между напряженностью и потенциалом.....	30
1.3.5. Безвихревой характер электростатического поля .....	31
1.3.6. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности.....	31
1.3.7. Расчет потенциалов простейших электростатических полей .....	33
Контрольные вопросы. Упражнения.....	33
<b>1.4. Диэлектрики в электростатическом поле .....</b>	<b>38</b>
1.4.1. Поляризация диэлектриков .....	38
1.4.2. Различные виды диэлектриков.....	42
1.4.3. Вектор электрического смещения $\vec{D}$ .....	46
1.4.4. Поток вектора электрического смещения. Теорема Остроградского – Гаусса для $\vec{D}$ .....	47
1.4.5. Изменение $\vec{E}$ и $\vec{D}$ на границе раздела двух диэлектриков .....	48
Контрольные вопросы. Упражнения.....	52
<b>1.5. Проводники в электростатическом поле.....</b>	<b>51</b>
1.5.1. Напряженность и потенциал электростатического поля в проводнике .....	51
1.5.2. Определение напряженности поля вблизи поверхности заряженного проводника .....	52
1.5.3. Экспериментальная проверка распределения заряда на проводнике .....	53
Контрольные вопросы. Упражнения.....	58

<b>1.6. Конденсаторы.....</b>	<b>57</b>
1.6.1. Электрическая емкость .....	57
1.6.2. Соединение конденсаторов .....	58
1.6.3. Расчет емкостей различных конденсаторов .....	60
1.6.4. Энергия электростатического поля .....	62
Контрольные вопросы. Упражнения.....	67
<b>1.7. Постоянный электрический ток .....</b>	<b>67</b>
1.7.1. Характеристики электрического тока .....	67
1.7.2. Уравнение непрерывности .....	68
1.7.3. Сторонние силы и ЭДС.....	69
1.7.4. Закон Ома для неоднородного участка цепи.....	69
1.7.5. Закон Ома в дифференциальной форме.....	71
1.7.6. Работа и мощность тока. Закон Джоуля – Ленца.....	71
Контрольные вопросы. Упражнения.....	77
<b>1.8. Электрический ток в металлах, полупроводниках и электролитах</b>	<b>76</b>
1.8.1. Электрический ток в металлах.....	76
1.8.2. Электрический ток в полупроводниках .....	80
1.8.3. Сверхпроводимость.....	85
1.8.4. Эмиссия электронов из проводников.....	87
1.8.5. Контактные явления на границе раздела двух проводников .....	93
1.8.6. Электрический ток в электролитах.....	93
Контрольные вопросы. Упражнения.....	101
<b>1.9. Электрический ток в газах .....</b>	<b>100</b>
1.9.1. Явление ионизации и рекомбинации в газах .....	100
1.9.2. Несамостоятельный газовый разряд.....	101
1.9.3. Самостоятельный газовый разряд .....	105
1.9.4. Типы разрядов .....	107
1.9.5. Применение газового разряда .....	111
1.9.6. Понятие о плазме.....	111
Контрольные вопросы. Упражнения.....	118
<b>Раздел 2. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ.....</b>	<b>117</b>
<b>2.1. Магнитное поле.....</b>	<b>117</b>
2.1.1. Магнитные взаимодействия .....	117
2.1.2. Закон Био – Савара – Лапласа.....	119
2.1.3. Магнитное поле движущегося заряда .....	120
2.1.4. Напряженность магнитного поля .....	121
2.1.5. Магнитное поле прямого тока.....	122
2.1.6. Теорема Гаусса для вектора магнитной индукции .....	123
Контрольные вопросы. Упражнения.....	126
<b>2.2. Силы, действующие на движущиеся заряды в магнитном поле ...</b>	<b>125</b>
2.2.1. Закон Ампера .....	125
2.2.2. Взаимодействие двух параллельных проводников с током.....	125
2.2.3. Воздействие магнитного поля на рамку с током.....	126
2.2.4. Единицы измерения магнитных величин .....	128
2.2.5. Сила Лоренца.....	129
Контрольные вопросы. Упражнения.....	132
<b>2.3. Циркуляция вектора магнитной индукции .....</b>	<b>132</b>

2.3.1. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции .....	132
2.3.2. Магнитное поле соленоида.....	134
2.3.3. Магнитное поле тороида .....	137
2.3.4. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле.....	137
2.3.5. Эффект Холла .....	140
Контрольные вопросы. Упражнения.....	143
<b>2.4. Явление электромагнитной индукции.....</b>	<b>142</b>
2.4.1. Опыты Фарадея. Индукционный ток. Правило Ленца .....	142
2.4.2. Величина ЭДС индукции.....	143
2.4.3. Природа ЭДС индукции .....	145
2.4.4. Циркуляция вектора напряженности вихревого электрического поля .....	147
2.4.5. Токи Фуко (вихревые токи).....	148
2.4.6. Скин-эффект .....	150
Контрольные вопросы. Упражнения.....	154
<b>2.5. Ускорители заряженных частиц .....</b>	<b>153</b>
2.5.1. Классификация ускорителей .....	153
2.5.2. Линейные ускорители .....	153
2.5.3. Циклические ускорители .....	154
2.5.4. Большой адронный коллайдер .....	154
Контрольные вопросы. Упражнения.....	164
<b>2.6. Самоиндукция и взаимная индукция .....</b>	<b>163</b>
2.6.1. Явление самоиндукции .....	163
2.6.2. Влияние самоиндукции на ток при замыкании и размыкании цепи, содержащей индуктивность. ....	164
2.6.3. Взаимная индукция .....	166
2.6.4. Индуктивность трансформатора.....	167
2.6.5. Энергия магнитного поля .....	168
Контрольные вопросы. Упражнения.....	172
<b>2.7. Магнитные свойства вещества.....</b>	<b>172</b>
2.7.1. Магнитные моменты электронов и атомов.....	172
2.7.2. Атом в магнитном поле .....	175
2.7.3. Магнитное поле в веществе.....	176
2.7.4. Диамагнетики и парамагнетики в магнитном поле .....	179
2.7.5. Ферромагнетики .....	180
Контрольные вопросы. Упражнения.....	187
<b>2.8. Уравнения Максвелла.....</b>	<b>186</b>
2.8.1. Закон полного тока.....	186
2.8.2. Ток смещения.....	186
2.8.3. Единая теория электрических и магнитных явлений. Система уравнений Максвелла .....	189
2.8.4. Пояснение к теории классической электродинамики.....	192
2.8.5. Скорость распространения ЭМП.....	193
2.8.6. Релятивистская трактовка магнитных явлений (общие положения) .....	195
Контрольные вопросы. Упражнения.....	198

<b>3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ.....</b>	<b>197</b>
<b>3.1. Электрические колебания .....</b>	<b>197</b>
3.1.1. Квазистационарные токи .....	197
3.1.2. Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления.....	197
3.1.3. Свободные затухающие электрические колебания.....	201
3.1.4. Вынужденные электрические колебания. Резонанс .....	204
3.1.5. Мощность, выделяемая в цепи переменного тока .....	208
Контрольные вопросы. Упражнения.....	209
<b>3.2. Электромагнитные волны.....</b>	<b>211</b>
3.2.1. Генерация электромагнитных волн .....	211
3.2.2. Дифференциальные уравнения ЭМВ .....	213
3.2.3. Экспериментальное исследование ЭМВ.....	215
3.2.4. Энергия и импульс электромагнитного поля .....	218
Контрольные вопросы. Упражнения.....	222
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>224</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....</b>	<b>225</b>
<b>ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ.....</b>	<b>226</b>
<b>ГЛОССАРИЙ.....</b>	<b>239</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ.....</b>	<b>245</b>
Значения фундаментальных констант.....	245
Греческий алфавит .....	245
Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименований.....	245
Производные единицы СИ, имеющие собственные наименования.....	246
Работа выхода электрона из металлов.....	246
Подвижность ионов в электролитах.....	247
Диэлектрические проницаемости .....	247
Удельное электросопротивление некоторых материалов .....	247

## ВВЕДЕНИЕ

Во второй части пособия рассмотрены вопросы электростатики, классической электродинамики и электромагнитные колебания и волны, включая экспериментальные законы и общую теорию методов. Возможно, это самый важный раздел физики, поскольку электромагнитные взаимодействия не только объясняют все электрические и магнитные явления, но и обеспечивают силы, благодаря которым вещество на атомном и молекулярном уровне существует как целое. Изучение электромагнитных взаимодействий на основе квантовой механики позволяет объяснить существование и свойства атомов, молекул и твердых тел.

Цель пособия – помочь студентам освоить материал программы, научить активно применять теоретические основы физики как рабочий аппарат, позволяющий решать конкретные задачи.

Пособие ориентировано на организацию самостоятельной работы студентов. Для удобства работы в приложении приведены фундаментальные физические константы, таблицы физических величин, некоторые справочные данные и сведения о размерностях физических величин. Более точные значения физических постоянных и таблицы физических величин приведены в справочнике «Фундаментальные константы».

Авторы с благодарностью примут все замечания и пожелания читателей, способствующие улучшению курса по адресам [smit@tpu.ru](mailto:smit@tpu.ru) и [krogozi@mail.ru](mailto:krogozi@mail.ru).

## 1.1. Электростатическое поле в вакууме

### 1.1.1. Электрический заряд. Закон сохранения электрического заряда

*Электростатика* – раздел, изучающий статические (неподвижные) заряды и связанные с ними электрические поля.

Перемещение зарядов либо отсутствует, либо происходит так медленно, что возникающие при движении зарядов магнитные поля ничтожны. Сила взаимодействия между зарядами определяется только их взаимным расположением. Следовательно, энергия электростатического взаимодействия – потенциальная энергия.

Несмотря на обилие различных веществ в природе существуют только два вида электрических зарядов: заряды подобные тем, которые возникают на стекле, потертом о шелк, и заряды, подобные тем, которые появляются на янтаре, потертом о мех. Первые были названы положительными, вторые – отрицательными зарядами. Так их назвал американский ученый Бенджамин Франклин в 1746 г. Одним из фундаментальных законов природы является закон сохранения электрического заряда: *алгебраическая сумма зарядов замкнутой системы сохраняется при любых процессах, проходящих внутри этой системы.*

*Электрические заряды не существуют сами по себе, а являются внутренними свойствами элементарных частиц – электронов, протонов и др.*

Опытным путем в 1914 г. американский физик Р. Милликен показал, что *электрический заряд дискретен*. Заряд любого тела составляет целое кратное от *элементарного электрического заряда*  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл:

$$q = \pm ne,$$

где  $n$  – целое число.

*Электрон* и *протон* являются соответственно носителями элементарных отрицательного и положительного зарядов.

### 1.1.2. Взаимодействие электрических зарядов в вакууме. Закон Кулона

*Точечным зарядом* ( $q$ ) называется заряженное тело, размеры которого пренебрежительно малы по сравнению с расстоянием до других заряженных тел, с которым оно взаимодействует.

В результате опытов Кулон установил, что *сила взаимодействия точечных зарядов в вакууме пропорциональна величине зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:*

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (1.1.1)$$

где  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$  – электрическая постоянная;

множитель  $4\pi$  выражает сферическую симметрию закона Кулона.

В векторной форме закон Кулона имеет следующий вид:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 |\vec{r}|}{r^3}, \quad (1.1.2)$$

где  $\frac{\vec{r}}{r}$  – единичный вектор, направленный от положительного заряда к отрицательному.

В электростатике взаимодействие зарядов подчиняется *третьему закону Ньютона: силы взаимодействия между зарядами равны по величине и направлены противоположно друг другу вдоль прямой, связывающей эти заряды* (рис. 1.1.1).

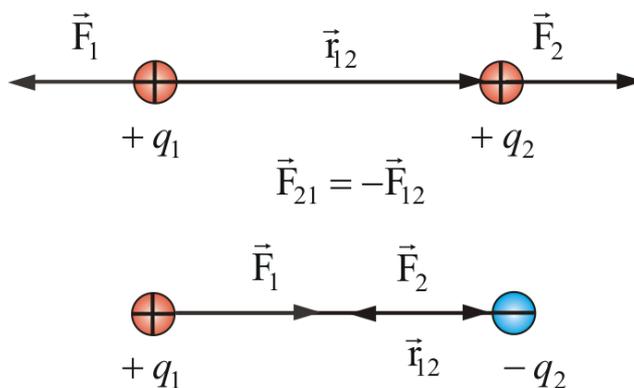


Рис. 1.1.1

Для определения силы взаимодействия тел, которые не могут рассматриваться как точечные заряды, необходимо разбивать эти тела на элементарные участки, а затем интегрировать по объему.

Закон Кулона справедлив при расстояниях  $10^{-15} < r < 10^7$  м. Внутри ядра действуют уже другие силы, не кулоновские.

### 1.1.3. Электростатическое поле. Напряженность поля

Вокруг заряда всегда есть **электрическое поле**, основное свойство которого заключается в том, что на всякий другой заряд, помещенный в это поле, действует сила. Электрическое поле обеспечивает взаимодействие электрических зарядов.

**Электрические** и **магнитные** поля – частный случай более общего – **электромагнитного поля** (ЭМП). Они могут порождать друг друга, превращаться друг в друга. Если заряды не движутся, то магнитное поле не возникает.

**ЭМП – не абстракция, а объективная реальность – форма существования материи, обладающая определенными физическими свойствами, которые мы можем измерить.**

Не существует статических электрических полей, не связанных с зарядами, как не существует «голых», не окруженных полем зарядов.

Силовой характеристикой поля, создаваемого зарядом  $q$ , является отношение силы, действующей на заряд, к величине этого заряда, называемое **напряженностью электростатического поля**, т.е.

$$E = \frac{F}{q} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (1.1.3)$$

или в векторной форме –

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (1.1.4)$$

здесь  $r$  – расстояние от заряда до точки, где мы изучаем это поле. Тогда

$$\vec{F} = q\vec{E} \text{ и, при } q = +1, \vec{F} = \vec{E}.$$

**Вектор напряженности электростатического поля** равен силе, действующей в данной точке на помещенный в нее пробный единичный положительный заряд.

Направление вектора напряженности определяет направление силы, действующей на положительный заряд, помещенный в рассматриваемую точку.

Единица измерения напряженности электростатического поля – **Вольт на метр** (В/м).

$$\text{В СИ } E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \text{ размерность напряженности } [E] = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}} \text{ или } \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

### 1.1.4. Сложение электростатических полей. Принцип суперпозиции

Одним из фундаментальных принципов физики является *принцип независимости действия сил, или принцип суперпозиции*, который распространяется и на электростатику.

Если поле создается несколькими точечными зарядами, то на пробный заряд  $q$  действует со стороны заряда  $q_k$  такая сила, как если бы других зарядов не было.

Результирующая сила определится выражением:

$$\vec{F} = \sum_k \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_k}{r_k^2} \frac{\vec{r}_k}{r_k} = \sum_k \vec{F}_k$$

– это математическая формулировка *принципа суперпозиции*.

Так как  $\vec{F} = q\vec{E}$ , то  $\vec{E}$  – результирующая напряженность поля в точке, где расположен пробный заряд; так же *подчиняется принципу суперпозиции*:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots = \sum_k \vec{E}_k. \quad (1.1.5)$$

*Напряженность результирующего поля системы точечных зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, созданных в данной точке каждым из них в отдельности.*

### 1.1.5. Электростатическое поле диполя

*Электрическим диполем называется система двух одинаковых по величине разноименных точечных зарядов, расстояние между которыми  $l$  значительно меньше расстояния до точек, где определяется поле системы, т. е.  $r \gg l$  (рис. 1.1.2).*

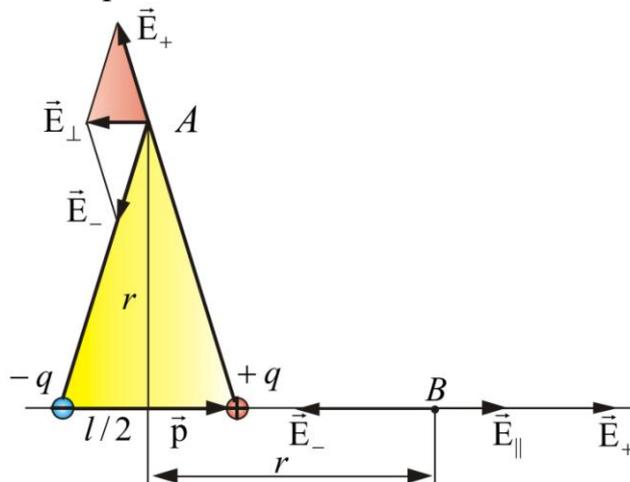


Рис. 1.1.2

Здесь  $\vec{l}$  называют **плечо диполя** – вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному и численно равный расстоянию между зарядами.

**Пример 1.** Найдем  $E_{\perp}$  в точке  $A$ , лежащей на прямой, проходящей через центр диполя и перпендикулярной к оси диполя (рис. 1.1.2):

$$E_{+} = E_{-} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (\text{т.к. } l \ll r). \quad (1.1.6)$$

Из подобия заштрихованных треугольников можно записать:

$$\frac{E_{\perp}}{E_{+}} = \frac{l}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{l}{r}, \quad \text{отсюда } E_{\perp} = E_{+} \frac{l}{r} = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (1.1.7)$$

Обозначим вектор:  $\vec{p} = ql\vec{l}$  – **электрический момент диполя** (или **дипольный момент**), это произведение положительного заряда диполя на плечо  $\vec{l}$ . Направление  $\vec{p}$  совпадает с направлением  $\vec{l}$ , т.е. от отрицательного заряда к положительному. Тогда, учитывая что  $ql = p$ , получим

$$E_{\perp} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad \text{или } \vec{E}_{\perp} = \frac{-\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (1.1.8)$$

**Пример 2.** На оси диполя, в точке  $B$  (рис. 1.1.2),

$$E_{\parallel} = \frac{2ql}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad \text{или } \vec{E}_{\parallel} = \frac{2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (1.1.9)$$

**Пример 3.** В произвольной точке ( $\varphi \approx \varphi_1 \approx \varphi_2$ ):

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3\cos^2 \varphi + 1}, \quad (1.5.5)$$

$$\text{При } \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \quad E_1 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

$$\text{При } \varphi_1 = \varphi_2 = 0, \quad E_2 = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Из приведенных примеров видно, что напряженность электрического поля системы зарядов равна геометрической сумме напряженностей полей каждого из зарядов в отдельности (*принцип суперпозиции*).

### Контрольные вопросы

1. В чем заключается закон сохранения заряда? Приведите примеры проявления закона.
2. Сформулируйте четыре закона сохранения существующих в природе.
3. Что представляет собой электростатическое поле и как его можно изобразить графически?
4. Запишите, сформулируйте и объясните закон Кулона.
5. Какие поля называют электростатическими?
6. Что такое напряженность  $\vec{E}$  электростатического поля?
7. Каково направление вектора напряженности  $\vec{E}$ ? Единица напряженности в СИ.
8. Какая физическая величина является силовой характеристикой электростатического поля? Напишите ее формулу.
9. Что такое поток вектора  $\vec{E}$ ? Единица его в СИ?
10. Электрический диполь помещен внутрь замкнутой поверхности. Каков поток  $\Phi_E$  сквозь эту поверхность?
11. Пользуясь принципом суперпозиции, найдите в поле двух точечных зарядов  $+q$  и  $+2q$ , находящихся на расстоянии  $l$  друг от друга, точку, где напряженность поля равна нулю.
12. Чему равно отношение напряженностей электростатических полей в точке  $B$ , лежащей на продолжении оси диполя (рис. 1.1.2), и в точке  $A$ , лежащей на перпендикуляре, проходящем через середину  $O$  оси этого диполя, если  $OA = OB$ ?
13. Приведите формулу напряженности в точке  $C$  расположенной произвольно по отношению к диполю.
14. . Два одинаковых шарика, имеющих заряды по  $400 \text{ нКл}$  соединены пружиной и находятся на гладком горизонтальном столе. Шарик колеблется так, что расстояние между ними меняется от  $L$  до  $4L$ . Найдите жесткость пружины, если известно, что ее длина в свободном состоянии  $2L$ , где  $L = 2 \text{ см}$ .
15. . Два небольших тела массой  $5 \text{ г}$  каждое, заряженные одинаковым зарядом  $1 \text{ мкКл}$ , находятся на горизонтальной плоскости на расстоянии  $10 \text{ м}$  друг от друга. Коэффициент трения тел о плоскость равен  $0,5$ . Какую минимальную начальную скорость надо сообщить одному из тел, чтобы сдвинуть с места второе тело?
16. . В поле силы тяжести закреплен точечный заряд  $-10 \text{ мкКл}$ , а под ним на расстоянии  $5 \text{ м}$  находится частица массой  $9 \text{ г}$  и зарядом  $4 \text{ мкКл}$ . Какую минимальную вертикальную скорость (в единицах СИ) надо сообщить частице, чтобы она долетела до закрепленного заряда?

## 1.2. Теорема Остроградского – Гаусса

### 1.2.1. Силовые линии электростатического поля

Для того чтобы описать электрическое поле, нужно задать вектор напряженности в каждой точке поля. Это можно сделать аналитически или графически. Для этого пользуются **силовыми линиями** – это линии, касательная к которым в любой точке поля совпадает с направлением вектора напряженности  $\vec{E}$  (рис. 1.2.1).

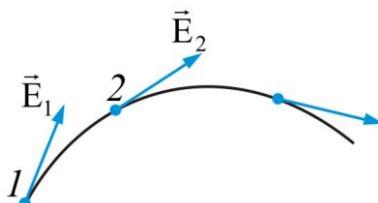


Рис. 1.2.1

Силовой линии приписывают определенное направление – от положительного заряда к отрицательному, или в бесконечность.

Рассмотрим случай *однородного электрического поля*.

**Однородным** называется электростатическое поле, во всех точках которого напряженность одинакова по величине и направлению, т.е.  $\vec{E} = \text{const}$ .

Однородное электростатическое поле изображается параллельными силовыми линиями на равном расстоянии друг от друга. Такое поле можно создать между заряженными бесконечными параллельными пластинами, например между пластинами конденсатора (рис. 1.2.2).

Поле точечного заряда неоднородно. Для точечного заряда линии напряженности исходят из положительного заряда и уходят в бесконечность и из бесконечности входят в отрицательный заряд. Так как  $E \sim 1/r^2$ , то и густота силовых линий обратно пропорциональна квадрату расстояния от заряда. Так как площадь поверхности сферы, через которую проходят эти линии, сама возрастает пропорционально квадрату расстояния, то общее число линий остается постоянным на любом расстоянии от заряда.

Для системы зарядов, как видим, силовые линии направлены от положительного заряда к отрицательному (рис. 1.2.2).

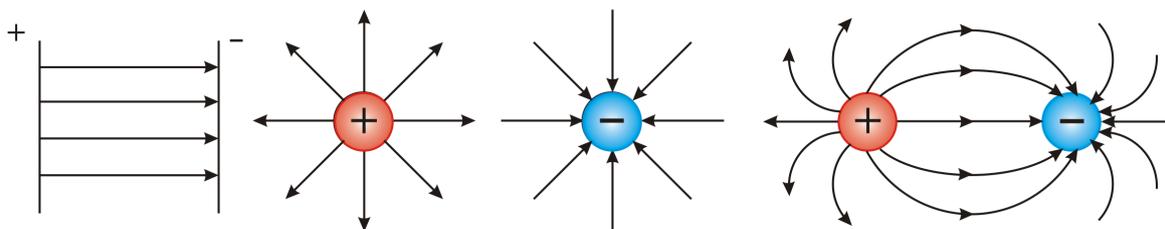


Рис. 1.2.2

Из рис. 1.2.2 видно, что густота силовых линий может служить и количественным показателем величины  $\vec{E}$ . Для этого необходимо, чтобы число силовых линий, пересекающих единичную площадку, нормальную к вектору напряженности, было равно модулю вектора напряженности  $|\vec{E}|$ .

### 1.2.2. Поток вектора напряженности

Если силовые линии однородного электрического поля напряженностью  $\vec{E}$  пронизывают некоторую площадку  $S$ , то **поток вектора напряженности** будет определяться формулой

$$\Phi_E = ES_{\perp} = ES \cos \alpha = E_n S,$$

где  $E_n$  – произведение вектора  $\vec{E}$  на нормаль  $\vec{n}$  к данной площадке (рис. 1.2.3).

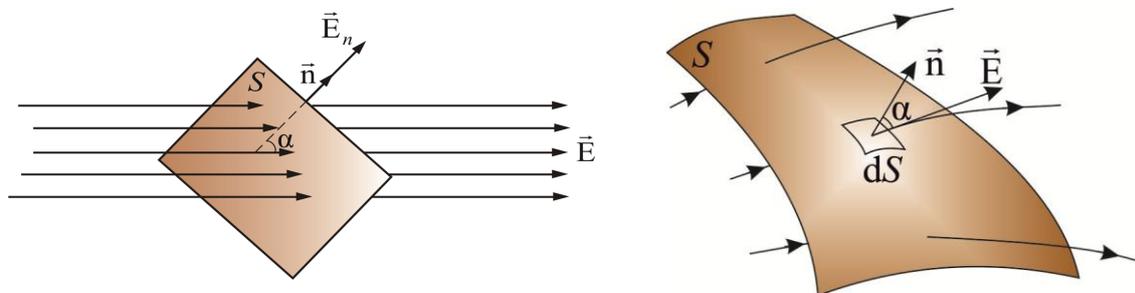


Рис. 1.2.3.

Полное число силовых линий, проходящих через поверхность  $S$ , называется **поток вектора напряженности**  $\Phi_E$  через эту поверхность.

В векторной форме можно записать, что  $\Phi_E = (\vec{E}, \vec{S})$  – скалярное произведение двух векторов, где вектор  $\vec{S} = \vec{n}S$ .

Таким образом, поток вектора  $\vec{E}$  есть скаляр, который в зависимости от величины угла  $\alpha$  может быть как положительным, так и отрицательным. Рассмотрим примеры, изображенные на рис. 1.2.4 и 1.2.5.

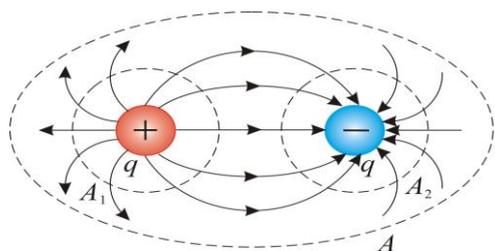


Рис. 1.2.4

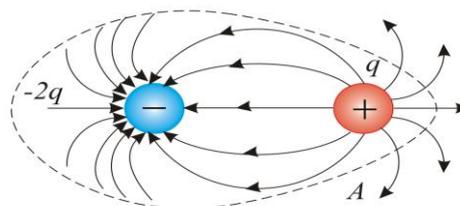


Рис. 1.2.5

На рис. 1.2.4 поверхность  $A_1$  окружает положительный заряд, и поток здесь направлен наружу, т.е.  $\Phi_E > 0$ . Поверхность  $A_2$  окружает отрицательный заряд, здесь  $\Phi_E < 0$  и направлен внутрь. Общий поток через поверхность  $A$  равен нулю.

Поток будет не равен нулю, если суммарный заряд внутри поверхности не равен нулю. Для конфигурации, изображенной на рис. 1.2.5, поток через поверхность  $A$  – отрицательный.

Таким образом, **поток вектора напряженности зависит от заряда.**

### 1.2.3. Теорема Остроградского – Гаусса

Пусть имеем положительный точечный заряд  $q$  (рис. 1.2.6).

Поток вектора напряженности через произвольную элементарную площадку  $dS$  будет равен

$$d\Phi_E = E dS \cos \alpha = E_n dS. \quad (1.2.1)$$

В однородном поле  $\Phi_E = ES$ . В произвольном электрическом поле

$$\Phi_E = \int_S E_n dS = \int_S \vec{E} d\vec{S}. \quad (1.2.2)$$

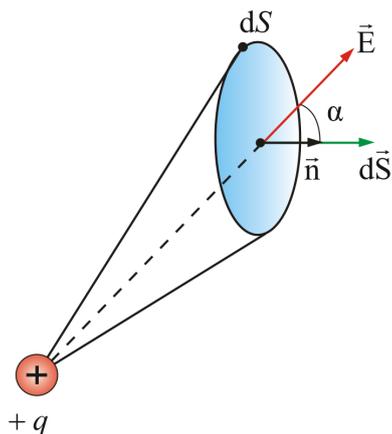


Рис. 1.2.6

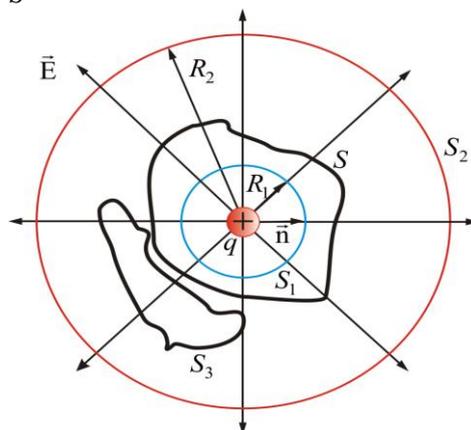


Рис. 1.2.7

Здесь  $d\vec{S} = dS \vec{n}$ , т.е. ориентация  $dS$  в пространстве задается с помощью единичного вектора  $\vec{n}$ . Таким образом, направление вектора  $d\vec{S}$  совпадает с направлением  $\vec{n}$  внешней нормали к поверхности.

Подсчитаем поток вектора  $\vec{E}$  через произвольную замкнутую поверхность  $S$ , окружающую точечный заряд  $q$  (рис. 1.2.7). Окружим заряд  $q$  сферой  $S_1$ .

Центр сферы совпадает с центром заряда. Радиус сферы  $S_1$  равен  $R_1$ .

В каждой точке поверхности  $S_1$  проекция  $\vec{E}$  на направление внешней нормали одинакова и равна

$$E_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_1^2}.$$

Тогда поток через  $S_1$

$$\Phi_E = \int_{S_1} E_n dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} 4\pi R_1^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Подсчитаем поток через сферу  $S_2$ , имеющую радиус  $R_2$ :

$$\Phi_E = \int_{S_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} 4\pi R_2^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Из непрерывности линии  $\vec{E}$  следует, что поток и через *любую произвольную* поверхность  $S$  будет равен этой же величине:

$$\Phi_E = \int_S E_n dS = \frac{q}{\epsilon_0} \text{ — теорема Гаусса для одного заряда.} \quad (1.2.3)$$

Полученный результат справедлив не только для одного заряда, но и для любого числа произвольно расположенных зарядов, находящихся внутри поверхности:

$$\Phi_E = \int_S E_n dS = \frac{\sum q}{\epsilon_0} \text{ — теорема Гаусса для нескольких зарядов.} \quad (1.2.4)$$

**Поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность в вакууме равен алгебраической сумме всех зарядов, расположенных внутри поверхности, деленной на  $\epsilon_0$ .**

При вычислении потока через замкнутую поверхность вектор нормали  $\vec{n}$  следует считать направленным наружу. Линии  $\vec{E}$ , выходящие из объема, ограниченного данной поверхностью, создают *положительный поток*, линии же, входящие в объем, — *отрицательный поток*.

Если между нашими сферами расположить ещё одну поверхность  $S_3$ , не охватывающую заряд, то, как видно из рис. 1.2.7, каждая линия напряженности  $\vec{E}$  будет дважды пересекать эту поверхность:

один раз с положительной стороны – войдет в поверхность  $S_3$ , другой раз – с отрицательной стороны – выйдет из поверхности  $S_3$ . В результате алгебраическая сумма линий напряженности, проходящая через замкнутую поверхность  $S_3$ , будет равна нулю, т.е. *полный поток, проходящий через  $S_3$ , равен нулю.*

*Таким образом, для точечного заряда  $q$  полный поток через любую замкнутую поверхность  $S$  будет равен*

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}, \text{ если заряд расположен внутри замкнутой поверхности;}$$

$$\Phi_E = 0, \text{ если заряд расположен вне замкнутой поверхности.}$$

Этот результат не зависит от формы поверхности, и знак потока совпадает со знаком заряда.

В общем случае электрические заряды могут быть «размазаны» с некоторой объемной плотностью  $\rho = dq/dV$ , различной в разных местах пространства. Здесь  $dV$  – **физически бесконечно малый объем**, под которым следует понимать *такой объем, который, с одной стороны, достаточно мал, чтобы в пределах его плотность заряда считать одинаковой, а с другой – достаточно велик, чтобы не могла проявиться дискретность заряда*, т.е. то, что любой заряд кратен целому числу элементарных зарядов электрона  $e^-$  или протона  $p^+$ .

Суммарный заряд объема  $dV$  будет равен

$$\sum q_i = \int_V \rho dV. \quad (1.2.5)$$

Тогда из теоремы Гаусса (2.3.4) можно получить

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (1.2.6)$$

– это ещё одна форма записи теоремы Остроградского – Гаусса, если заряд неравномерно распределен по объему.

Необходимо обратить внимание на следующее обстоятельство: в то время как само поле  $\vec{E}$  зависит от конфигурации всех зарядов, поток  $\Phi_E$  сквозь произвольную замкнутую поверхность определяется только алгебраической суммой зарядов внутри поверхности  $S$ . Это значит, что *если передвинуть заряды, то  $\vec{E}$  изменится всюду, и на поверхности  $S$ , а поток вектора  $\vec{E}$  через эту поверхность останется прежним.*

### 1.2.4. Дифференциальная форма теоремы Остроградского – Гаусса

С помощью дифференциальной формы теоремы можно рассчитать электростатическое поле при произвольном пространственном распределении зарядов. В ней установлена связь между объемной плотностью заряда  $\rho$  и изменением  $\vec{E}$  в окрестности данной точки пространства.

Пусть заряд распределен в пространстве  $\Delta V$  с объемной плотностью  $\langle \rho \rangle$ . Тогда

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0};$$

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{\langle \rho \rangle \Delta V}{\epsilon_0};$$

$$\frac{1}{\Delta V} \oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{\langle \rho \rangle}{\epsilon_0}.$$

Теперь устремим  $\Delta V \rightarrow 0$ , стягивая его к интересующей нас точке. Очевидно, что при этом  $\langle \rho \rangle$  будет стремиться к  $\rho$  в данной точке, т.е.

$$\frac{\langle \rho \rangle}{\epsilon_0} \rightarrow \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Величину, являющуюся пределом отношения  $\oint \vec{E} d\vec{S}$  к  $\Delta V$ , при  $\Delta V \rightarrow 0$ , называют **дивергенцией поля**  $\vec{E}$  и обозначают  $\text{div } \vec{E}$ . Тогда, по определению,

$$\text{div } \vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \vec{E} d\vec{S}. \quad (1.2.7)$$

Аналогично определяется дивергенция любого другого векторного поля. Из этого определения следует, что *дивергенция является скалярной функцией координат*. В декартовой системе координат дивергенция может быть представлена формулой

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}; \quad (1.2.8)$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.2.9)$$

**Это теорема Остроградского – Гаусса в дифференциальной форме.**

Написание многих формул упрощается, если ввести векторный дифференциальный оператор  $\vec{\nabla}$  (набла);

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}, \quad (1.2.10)$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орты осей (единичные векторы).

Сам по себе оператор  $\vec{\nabla}$  смысла не имеет. Он приобретает смысл в сочетании с векторной или скалярной функцией, на которую символично умножается:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \nabla_x E_x + \nabla_y E_y + \nabla_z E_z = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z};$$

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.2.11)$$

Формула (1.2.11) – это тоже **дифференциальная форма теоремы Остроградского – Гаусса**.

В тех точках поля, где  $\text{div } E > 0$  (положительные заряды), – **источники** поля, где  $\text{div } E < 0$  (отрицательные заряды) – **стоки**. **Линии  $\vec{E}$  выходят из источников и заканчиваются в стоках**.

### 1.2.5. Вычисление электрических полей с помощью теоремы Остроградского – Гаусса

Продемонстрируем возможности теоремы Остроградского – Гаусса на нескольких примерах.

#### Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости

*Поверхностная плотность заряда* на произвольной плоскости площадью  $S$  определяется по формуле

$$\sigma = \frac{dq}{dS},$$

где  $dq$  – заряд, сосредоточенный на площади  $dS$ ;  $dS$  – физически бесконечно малый участок поверхности.

Пусть  $\sigma$  во всех точках плоскости  $S$  одинакова. Заряд  $q$  – положительный. Напряженность  $\vec{E}$  во всех точках будет иметь направление, перпендикулярное плоскости  $S$  (рис. 1.2.8).

Очевидно, что в симметричных относительно плоскости точках напряженность  $\vec{E}$  будет одинакова по величине и противоположна по направлению.

Представим себе цилиндр с образующими, перпендикулярными плоскости, и основаниями  $\Delta S$ , расположенными симметрично относительно плоскости (рис. 1.2.9).

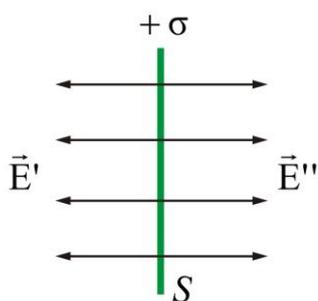


Рис. 1.2.8

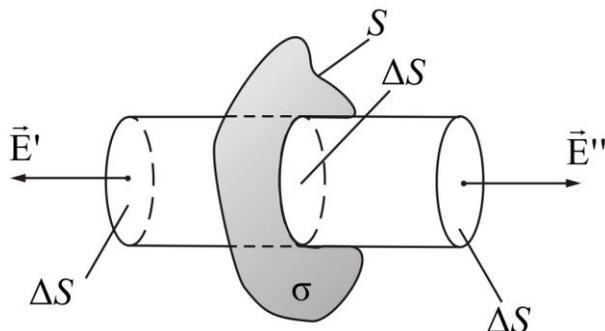


Рис. 1.2.9

Тогда  $E' = E'' = E$ .

Применим теорему Остроградского – Гаусса. Поток  $\Phi_E$  через боковую часть поверхности цилиндра равен нулю, т.к.  $E_n = 0$ . Для основания цилиндра  $E_n = E$ .

Суммарный поток через замкнутую поверхность (цилиндр) будет равен

$$\Phi_E = 2\Delta S E.$$

Внутри поверхности заключен заряд  $q = \sigma\Delta S$ . Следовательно, из теоремы Остроградского – Гаусса получим

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} = 2\Delta S E = \sigma\Delta S \frac{1}{\epsilon_0},$$

откуда видно, что напряженность поля плоскости  $S$  равна

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (1.2.12)$$

Полученный результат не зависит от длины цилиндра. Это значит, что на любом расстоянии от плоскости  $E = \text{const}$ .

### Поле двух равномерно заряженных плоскостей

Пусть две бесконечные плоскости заряжены разноименными зарядами с одинаковой по величине поверхностной плотностью  $\sigma$  (рис.1.2.10).

Результирующее поле, как было сказано выше, находится как суперпозиция полей, создаваемых каждой из плоскостей:  $E = E_+ + E_-$ .

Тогда *внутри плоскостей*

$$E = \sigma / \epsilon_0. \quad (1.2.13)$$

*Вне плоскостей* напряженность поля  $E = 0$ .

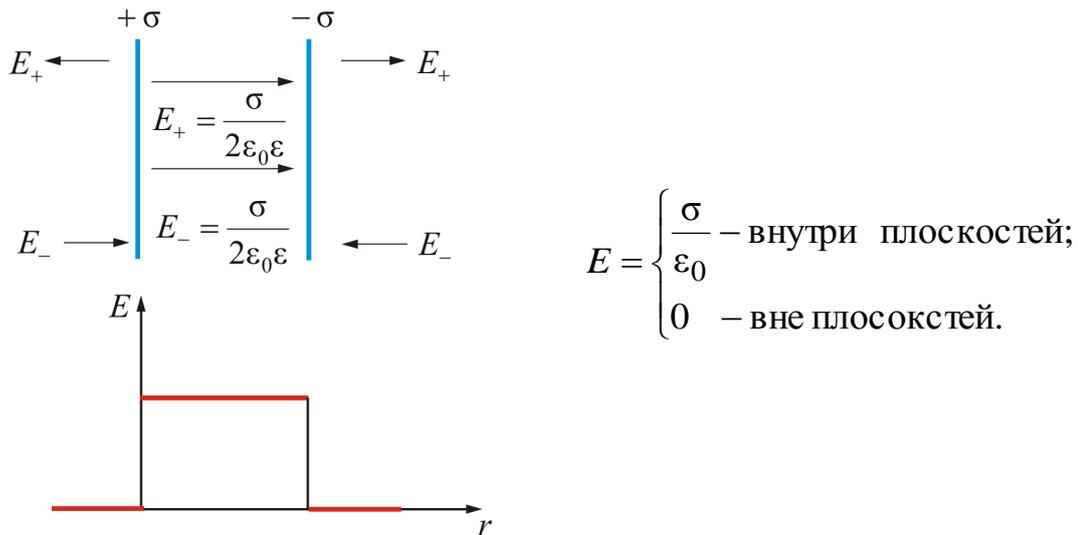


Рис. 1.2.10

Полученный результат справедлив и для плоскостей конечных размеров, если расстояние между плоскостями гораздо меньше линейных размеров плоскостей (плоский конденсатор).

### Пондермоторные силы.

Между пластинами конденсатора действует сила взаимного притяжения (на единицу площади пластин)

$$F_{\text{ед}} = \frac{F}{S} = \frac{S\sigma E}{S}, \text{ т.е. } F_{\text{ед}} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0\varepsilon}. \quad (1.2.14)$$

Механические силы, действующие между заряженными телами, называют **пондермоторными**.

Тогда сила притяжения между пластинами конденсатора

$$F = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0}, \quad (1.2.15)$$

где  $S$  – площадь обкладок конденсатора. Так как  $\sigma = \frac{q}{S} = E\varepsilon_0$ , то

$$F = \frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S} = \frac{\varepsilon_0 E^2 S}{2} \quad (1.2.16)$$

– это формула для расчета пондермоторной силы.

### Поле равномерно заряженного бесконечно длинного цилиндра (нити)

Пусть поле создается бесконечной цилиндрической *поверхностью* радиуса  $R$ , заряженной с постоянной линейной плотностью  $\lambda^+ = \frac{dq}{dl}$ , где  $dq$  – заряд, сосредоточенный на отрезке цилиндра (рис. 1.2.11).

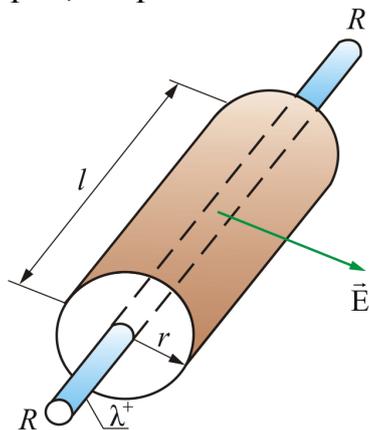


Рис. 1.2.11

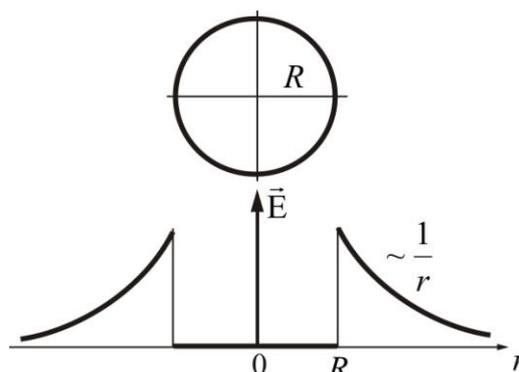


Рис. 1.2.12

Из соображения симметрии следует, что  $E$  в любой точке будет направлена вдоль радиуса, перпендикулярно оси цилиндра.

Представим вокруг цилиндра (нити) *коаксиальную* замкнутую поверхность (*цилиндр в цилиндре*) радиуса  $r$  и длиной  $l$ . Для оснований цилиндров  $E_n = 0$ , для боковой поверхности  $E_n = E(r)$ , т.е. зависит от расстояния  $r$ .

Следовательно, поток вектора  $\vec{E}$  через рассматриваемую поверхность равен  $\Phi_E = E(r)S = E(r)2\pi rl$ .

При  $r \geq R$  на поверхности будет заряд  $q = \lambda l$ . По теореме Остроградского – Гаусса  $E(r)2\pi rl = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$ , отсюда

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \text{ при } r \geq R. \quad (1.2.17)$$

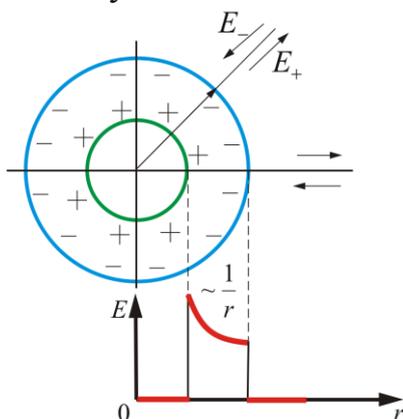
Если  $r < R$ ,  $E(r) = 0$ , т.к. внутри замкнутой поверхности зарядов нет (рис. 1.2.12).

Если уменьшать радиус цилиндра  $R$  (при  $\lambda = \text{const}$ ), то можно вблизи поверхности получить поле с очень большой напряженностью и, при  $R \rightarrow 0$ , получить нить.

**Поле двух коаксиальных цилиндров с одинаковой линейной плотностью  $\lambda$ , но разным знаком**

Внутри меньшего и вне большего цилиндров поле будет отсутствовать,  $E = 0$  (рис. 1.2.13).

В зазоре между цилиндрами поле определяется так же, как и в предыдущем случае:



$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Рис. 1.2.13

Это справедливо и для бесконечно длинного цилиндра, и для цилиндров конечной длины, если зазор между цилиндрами намного меньше длины цилиндров (цилиндрический конденсатор).

**Поле равномерно заряженной сферической поверхности**

Пустотелый шар (или сфера) радиуса  $R$  заряжен положительным зарядом с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Поле в данном случае будет центрально-симметричным,  $\vec{E}$  в любой точке проходит через центр шара;  $E = E(r)$  и силовые линии перпендикулярны поверхности в любой точке. Вообразим вокруг шара сферу радиуса  $r$  (рис. 1.2.14).

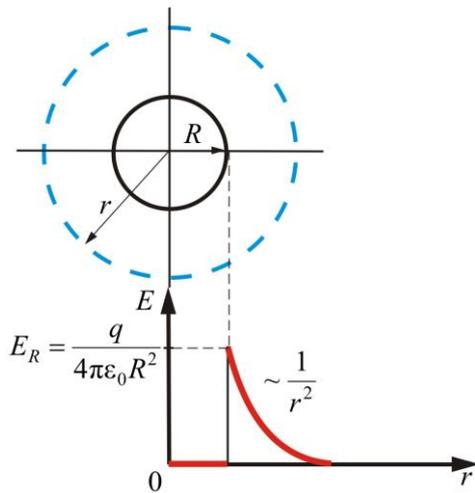
Если  $r \geq R$ , то внутрь воображаемой сферы попадет весь заряд  $q$ , распределенный по сфере, тогда

$$\Phi_E = E(r)S = E(r)4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0},$$

откуда **поле вне сферы**

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \tag{1.2.18}$$

**Внутри сферы**, при  $r < R$ , поле будет равно нулю, т.к. там нет зарядов:  $E(r) = 0$ .



$$E = \begin{cases} 0 - \text{внутри сферы;} \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \text{при } r \geq R \text{ вне сферы.} \end{cases}$$

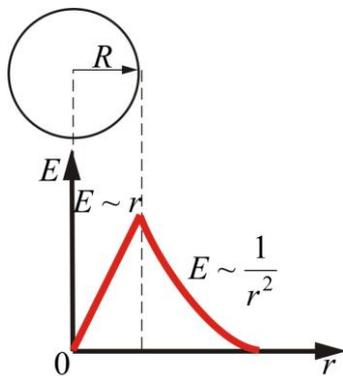
Рис. 1.2.14

Поле вне сферы тождественно полю точечного заряда той же величины, помещенному в центр сферы.

### Поле объемного заряженного шара

Для поля *вне шара* радиусом  $R$  (рис. 1.2.15) получается тот же результат, что и для пустотелой сферы, т.е. справедлива формула

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$



$$E = \begin{cases} \rho \frac{r}{3\epsilon_0} - \text{внутри шара;} \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \text{при } r \geq R \text{ вне шара.} \end{cases}$$

Рис. 1.2.15

Но внутри шара, при  $r < R$ , сферическая поверхность будет содержать в себе заряд, равный

$$q = \rho \frac{4}{3} \pi r^3,$$

где  $\rho$  – объемная плотность заряда, равная  $\rho = \frac{q}{V}$ ;  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  – объем шара. Тогда, по теореме Остроградского – Гаусса, запишем, что

$$\Phi_E = E(r)S = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r^3,$$

т.е. *внутри шара*

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}. \quad (1.2.19)$$

Таким образом, внутри шара  $E \sim r$ .

### Контрольные вопросы. Упражнения

1. В чем заключается физический смысл теоремы Остроградского – Гаусса для электростатического поля в вакууме?
2. Что такое линейная, поверхностная и объемная плотности зарядов?
3. Как показать, что электростатическое поле является потенциальным?
4. Как записывается Теорема Остроградского – Гауса в дифференциальной и интегральной формах?
5. С помощью теоремы Остроградского – Гаусса рассчитайте и изобразите графически:
  - поле бесконечной равномерно заряженной плоскости (с поверхностью заряда);
  - поле двух (бесконечно длинных) параллельных равномерно заряженных плоскостей;
  - поле бесконечно длинного равномерно заряженного прямого цилиндра (нити);
  - поле двух коаксиальных бесконечно длинных равномерно и равноименно заряженных цилиндров (цилиндрический конденсатор);
  - поле сферы, заряженной равномерно с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ ;
  - поле двух concentрических равномерно и разноименно заряженных сферических поверхностей (сферический конденсатор);
  - поле равномерно заряженного шара с объемной плотностью  $\rho$ .

### 1.3. Потенциальная энергия и работа электростатического поля. Связь напряженности с потенциалом

#### 1.3.1. Работа сил электростатического поля

Между электростатическими полями и гравитационными прослеживается аналогия в форме написания законов взаимодействия. Однако этим аналогия не ограничивается. Как и гравитационное поле, электростатическое можно описать с помощью **потенциала**. Для этого необходимо показать, что силы электростатического поля, также как и гравитационные, **консервативны**, а само поле – **потенциально**.

Рассмотрим поле, создаваемое неподвижным точечным зарядом  $q$ . В любой точке этого поля на пробный точечный заряд  $q'$  действует сила  $\vec{F}$  (рис. 1.3.1), равная

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = F(r) \frac{\vec{r}}{r},$$

где  $F(r)$  – модуль вектора силы  $\vec{F}$ ;  $\frac{\vec{r}}{r}$  – единичный вектор, определяющий положение заряда  $q'$  относительно  $q$ ;  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная.

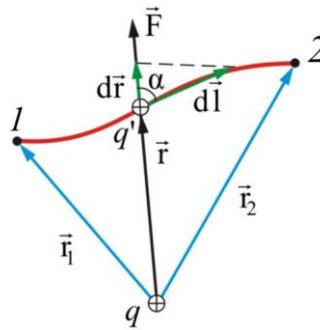


Рис. 1.3.1

Из раздела «Физические основы механики» известно, что *любое стационарное поле центральных сил является консервативным, т.е. работа сил этого поля не зависит от формы пути, а только от положения конечной и начальной точек.*

Вычислим работу, которую совершает электростатическое поле, созданное зарядом  $q$  по перемещению заряда  $q'$  из точки 1 в точку 2.

Работа на пути  $dl$  равна

$$dA = Fdl\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} dl\cos\alpha,$$

где  $dr$  – приращение радиус-вектора  $\vec{r}$  при перемещении на  $dl$ ;  $dr = dl \cos\alpha$ , т.е.

$$dA = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr.$$

Тогда полная работа при перемещении  $q'$  из точки 1 в точку 2 равна интегралу

$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1.3.1)$$

Таким образом, **работа электростатических сил не зависит от формы пути, а только лишь от координат начальной и конечной точек перемещения.** Следовательно, **силы поля консервативны, а само поле – потенциально.**

Этот вывод можно распространить и на поле, созданное системой зарядов, т. к. по принципу суперпозиции полей

$$\vec{E} = \sum_k \vec{E}_k.$$

Итак, как и в механике, любое стационарное поле центральных сил является консервативными, т.е. работа сил этого поля не зависит от формы пути, а только от положения начальной и конечной точек. Именно таким свойством обладает электростатическое поле – поле, образованное системой неподвижных зарядов. Если в качестве пробного заряда, перенесенного из точки 1 (рис. 1.3.2) заданного поля  $\vec{E}$  в точку 2, взять положительный единичный заряд  $q$ , то элементарная работа сил поля будет равна

$$dA = q\vec{E}d\vec{l}. \quad (1.3.2)$$

Тогда вся работа равна

$$A = q \int_1^2 \vec{E}d\vec{l}. \quad (1.3.3)$$

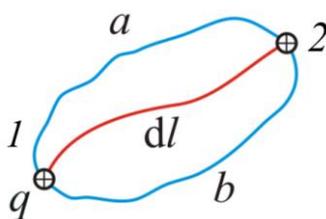


Рис. 1.3.2

Из независимости линейного интеграла от пути между двумя точками следует, что по **произвольному замкнутому пути**

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (1.3.4)$$

Такой интеграл по замкнутому контуру называется *циркуляцией вектора  $\vec{E}$* , а формула (1.3.4) носит название **теорема о циркуляции  $\vec{E}$** .

Для доказательства теоремы разобьем произвольно замкнутый путь на две части:  $1a2$  и  $2b1$  (рис. 1.3.2). Из сказанного выше следует, что

$$\int_1^2 E dl = - \int_2^1 E dl.$$

Интегралы по модулю равны, но знаки противоположны. Тогда работа по замкнутому пути

$$A = q \oint \vec{E} d\vec{l} = q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} - q \int_2^1 \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Поле, обладающее такими свойствами, называется **потенциальным**. Любое электростатическое поле является потенциальным.

### 1.3.2. Потенциальная энергия

В предыдущем параграфе было доказано, что электростатическое поле потенциально. Следовательно, для него можно ввести функцию состояния, зависящую от координат, – **потенциальную энергию**.

Исходя из принципа суперпозиции сил  $\vec{F} = \sum_k \vec{F}_k$ , можно показать, что общая работа  $A$  будет равна сумме работ каждой силы:

$$A = \sum_k A_k.$$

Здесь каждое слагаемое не зависит от формы пути, следовательно, не зависит от формы пути и сумма.

Итак, электростатическое поле потенциально.

Работу сил электростатического поля можно выразить через *убыль потенциальной энергии* – разность двух функций состояний:

$$A_{12} = W_1 - W_2. \quad (1.3.5)$$

Это выражение для работы можно переписать в виде

$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r_2}. \quad (1.3.6)$$

Сопоставляя формулы (1.3.5) и (1.3.6), получаем **выражение для потенциальной энергии** заряда  $q'$  в поле заряда  $q$ :

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r} + \text{const}. \quad (1.3.7)$$

Потенциальная энергия определяется с точностью до постоянной интегрирования.

Значение константы в выражении для  $W$  выбирают таким образом, чтобы при удалении заряда на бесконечность (т.е. при  $r \rightarrow \infty$ ) потенциальная энергия обращалась в нуль.

Для системы зарядов суммарная потенциальная энергия складывается алгебраически:

$$W = \sum_k W_k. \quad (1.3.8)$$

### 1.3.3. Потенциал. Разность потенциалов

Разные пробные заряды ( $q', q'', \dots$ ) будут обладать в одной и той же точке поля разными энергиями ( $W', W''$  и т.д.). Однако отношение  $W/q'$  будет для всех зарядов одним и тем же. Поэтому можно ввести скалярную величину, являющуюся *энергетической характеристикой собственно поля*, – **потенциал**

$$\varphi = \frac{W}{q'}. \quad (1.3.9)$$

Из этого выражения следует, что **потенциал численно равен потенциальной энергии, которой обладает в данной точке поля единичный положительный заряд**.

Подставив в (1.3.9) значение потенциальной энергии (1.3.7), получим для потенциала точечного заряда следующее выражение:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (1.3.10)$$

Потенциал, как и потенциальную энергию, определяют с точностью до постоянной интегрирования. Поскольку физический смысл имеет не потенциал, а разность потенциалов, поэтому договорились считать, что потенциал точки, удаленной в бесконечность, равен нулю. Когда говорят «потенциал такой-то точки», имеют в виду *разность потенциалов между этой точкой и точкой, удаленной в бесконечность*. Другое определение потенциала –

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q}, \quad \text{или} \quad A_\infty = q\varphi,$$

т.е. **потенциал численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки в бесконечность (или наоборот – такую же работу нужно совершить, чтобы переместить единичный положительный заряд из бесконечности в данную точку поля)**. При этом  $\varphi > 0$ , если  $q > 0$ .

Если поле создается системой зарядов, то, используя принцип суперпозиции, получаем

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{q_k q'_k}{r_k} \quad (1.3.11)$$

Тогда и для потенциала  $\varphi = \sum_k \varphi_k$ , или

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{q_k}{r_k}, \quad (1.3.12)$$

т.е. потенциал поля, создаваемый системой зарядов, равен **алгебраической** сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности. А вот напряженности складываются при наложении полей – **векторно**. По этой причине потенциалы полей считать проще, чем напряженности.

Вернемся к работе сил электростатического поля над зарядом  $q$ . Выразим работу через разность потенциалов между начальной и конечной точками:

$$A_{12} = W_1 - W_2 = \varphi_1 q - \varphi_2 q = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (1.3.13)$$

Таким образом, работа над зарядом  $q$  равна произведению заряда на убыль потенциала, т.е.

$$\begin{aligned} A &= q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU; \\ A &= qU, \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

где  $U$  – напряжение.

Аналогия с гравитационным полем:

$$A = mgh_1 - mgh_2 = m(gh_1 - gh_2),$$

здесь  $gh$  – смысл потенциала, а  $m$  – заряда гравитационного поля.

Итак, потенциал – скалярная величина, поэтому пользоваться и вычислять  $\varphi$  проще, чем  $\vec{E}$ . Приборы для измерения разности потенциалов широко распространены.

Формулу  $A_\infty = q\varphi$  можно использовать для установления единиц потенциала: за единицу  $\varphi$  принимают потенциал в такой точке поля, для перемещения в которую из бесконечности единичного положительного заряда необходимо совершить работу, равную единице.

В СИ единица потенциала  $1 \text{ В} = 1 \text{ Дж/1Кл}$ .

В физике часто используется единица энергии и работы, называемая электрон-вольт (эВ) – это работа, совершенная силами поля над зарядом, равным заряду электрона при прохождении им разности потенциалов  $1 \text{ В}$ , т.е.

$$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot \text{В} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

### 1.3.4. Связь между напряженностью и потенциалом

Итак, электростатическое поле можно описать либо с помощью векторной величины  $\vec{E}$ , либо с помощью скалярной величины  $\varphi$ . Очевидно, что между этими величинами должна существовать определенная связь. Найдем ее.

Изобразим перемещение заряда  $q$  по произвольному пути  $l$  (рис. 1.3.2) в электростатическом поле  $\vec{E}$ .

Работу, совершенную силами электростатического поля на бесконечно малом отрезке  $dl$ , можно найти так:

$$dA = F_l dl = E_l q dl, \quad (1.3.15)$$

где  $E_l$  – проекция  $\vec{E}$  на  $d\vec{l}$ ;  $dl$  – произвольное направление перемещения заряда.

С другой стороны, как мы показали, эта работа, если она совершена электростатическим полем, равна убыли потенциальной энергии заряда, перемещенного на расстоянии  $dl$ :

$$dA = -q d\varphi; \quad E_l q dl = -q d\varphi,$$

отсюда

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl}. \quad (1.3.16)$$

Для ориентации  $dl$  (направление перемещения) в пространстве надо знать проекции  $\vec{E}$  на оси координат:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z};$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k}. \quad (1.3.17)$$

По определению градиента *сумма первых производных от какой-либо функции по координатам есть градиент этой функции*, т.е.

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k},$$

$\text{grad } \varphi$  – *вектор, показывающий направление наибыстрейшего увеличения функции.*

Тогда коротко связь между  $\vec{E}$  и  $\varphi$  записывается так:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi, \quad (1.3.18)$$

или так:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi, \quad (1.3.19)$$

Знак минус говорит о том, что вектор  $\vec{E}$  направлен в сторону уменьшения потенциала электрического поля.

### 1.3.5. Безвихревой характер электростатического поля

Из условия  $\vec{E} = -\nabla\varphi$  следует одно важное соотношение, а именно: *величина векторного произведения  $[\nabla, \vec{E}]$  для стационарных электрических полей всегда равна нулю.* Действительно, по определению, имеем

$$[\nabla, \vec{E}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \varphi = 0,$$

поскольку определитель содержит две одинаковые строки.

Величина  $[\nabla, \vec{E}]$  называется *ротором*, или *вихрем*, и обозначается как  $\text{rot } \vec{E}$ .

Мы получаем *важнейшее уравнение электростатики*

$$\text{rot } \vec{E} = 0. \quad (1.3.20)$$

Таким образом, *кулоновское электростатическое поле – безвихревое.*

Согласно теореме Стокса между контурным и поверхностным интегралами существует следующая связь:

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S} = 0,$$

где контур  $L$  ограничивает поверхность  $S$ , ориентация которой определяется направлением вектора положительной нормали  $\vec{n}$ :

$$d\vec{S} = \vec{n} dS.$$

Поэтому *работа при перемещении заряда по любому замкнутому пути в электростатическом поле равна нулю.*

### 1.3.6. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности

Направление *силовой линии* (линии напряженности) в каждой точке совпадает с направлением  $\vec{E}$ . Отсюда следует, что *напряженность  $\vec{E}$  равна разности потенциалов  $U$  на единицу длины силовой линии.*

Именно вдоль силовой линии происходит максимальное изменение потенциала. Поэтому всегда можно определить  $\vec{E}$  между двумя точками, измеряя  $U$  между ними, причем тем точнее, чем ближе точки. В однородном электрическом поле силовые линии – прямые. Поэтому здесь определить  $\vec{E}$  наиболее просто:

$$E = \frac{U}{l} . \quad (1.3.21)$$

Теперь дадим определение *эквипотенциальной поверхности*. **Воображаемая поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, называется эквипотенциальной поверхностью.** Уравнение этой поверхности –

$$\varphi = \varphi(x, y, z) = \text{const} \quad (1.3.22)$$

Графическое изображение силовых линий и эквипотенциальных поверхностей показано на рис. 1.3.3.



Рис. 1.3.3

Вектор напряженности  $\vec{E}$  в каждой точке направлен по нормали к эквипотенциальной поверхности.

Эквипотенциальных поверхностей можно провести сколько угодно много. По густоте эквипотенциальных поверхностей можно судить о величине  $\vec{E}$ ; это будет при условии, что разность потенциалов между двумя соседними эквипотенциальными поверхностями равна постоянной величине.

Формула  $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$  выражает связь потенциала с напряженностью и позволяет по известным значениям  $\varphi$  найти напряженность поля в каждой точке. Можно решить и обратную задачу, т.е. по известным значениям  $\vec{E}$  в каждой точке поля найти разность потенциалов между двумя произвольными точками поля. Для этого воспользуемся тем, что работа, совершаемая силами поля над зарядом  $q$  при перемещении его из точки 1 в точку 2, может быть вычислена как

$$A_{12} = q \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}).$$

С другой стороны, работу можно представить в виде

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2), \text{ тогда } \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}).$$

Интеграл можно брать по любой линии, соединяющей точку 1 и точку 2, ибо работа сил поля не зависит от пути. Для обхода по замкнутому контуру  $\varphi_1 = \varphi_2$  получим

$$\oint (\vec{E}, d\vec{l}) = 0,$$

т.е. пришли к известной нам теореме о циркуляции вектора напряженности. Из обращения в нуль циркуляции вектора  $\vec{E}$  следует, что линии  $\vec{E}$  электростатического поля не могут быть замкнутыми: они начинаются на положительных зарядах (*истоки*) и на отрицательных зарядах заканчиваются (*стоки*) или уходят в бесконечность (рис. 1.3.3).

Это соотношение верно только для электростатического поля. Впоследствии мы с вами выясним, что поле движущихся зарядов не является потенциальным и для него это соотношение не выполняется.

### 1.3.7. Расчет потенциалов простейших электростатических полей

Рассмотрим несколько примеров вычисления разности потенциалов между точками поля, созданного некоторыми заряженными телами.

#### Разность потенциалов между точками поля, образованного двумя бесконечными заряженными плоскостями

Связь напряженности с потенциалом  $E = -\frac{d\varphi}{dl}$ , тогда

$$d\varphi = -Edl, \quad (1.3.23)$$

где  $E = \sigma/\epsilon_0$  – напряженность электростатического поля между заряженными плоскостями, найденная в п. 1.2.5 с помощью теоремы Остроградского – Гаусса;  $\sigma = q/S$  – поверхностная плотность заряда.

Теперь, чтобы получить выражение для потенциала между плоскостями, проинтегрируем выражение (1.3.23):

$$\int_1^2 d\varphi = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} dx;$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}(x_2 - x_1), \text{ или } \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}(x_2 - x_1). \quad (1.3.24)$$

$$\text{При } x_1 = 0 \text{ и } x_2 = d \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}. \quad (1.3.25)$$

На рис. 1.3.4 изображена графическая зависимость напряженности  $E$  и потенциала  $\varphi$  от расстояния между плоскостями.

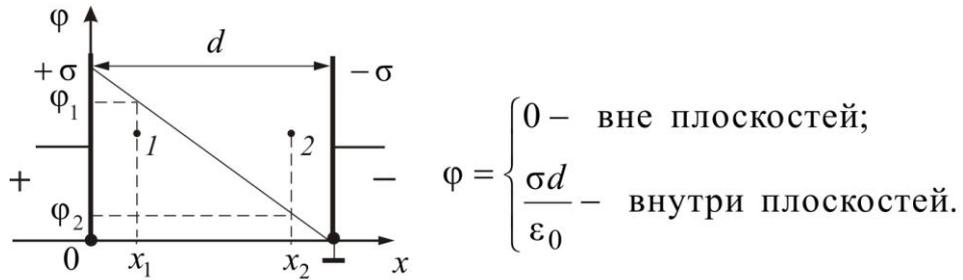


Рис. 1.3.4

**Разность потенциалов между точками поля, образованного заряженной бесконечно длинной цилиндрической поверхностью**

В п. 1.2.5 с помощью теоремы Остроградского – Гаусса была вычислена напряженность поля для бесконечного цилиндра. Воспользовавшись полученным результатом, найдем разность потенциалов для этой поверхности.

Так как  $d\varphi = -E dr$ , то  $\int_1^2 d\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}$ , отсюда найдем разность потенциалов в произвольных точках 1 и 2:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

На рис. 1.3.5 изображена зависимость напряженности  $E$  и потенциала  $\varphi$  от  $r$ . (Здесь и далее  $E$  изображена сплошной линией, а  $\varphi$  – пунктирной.)

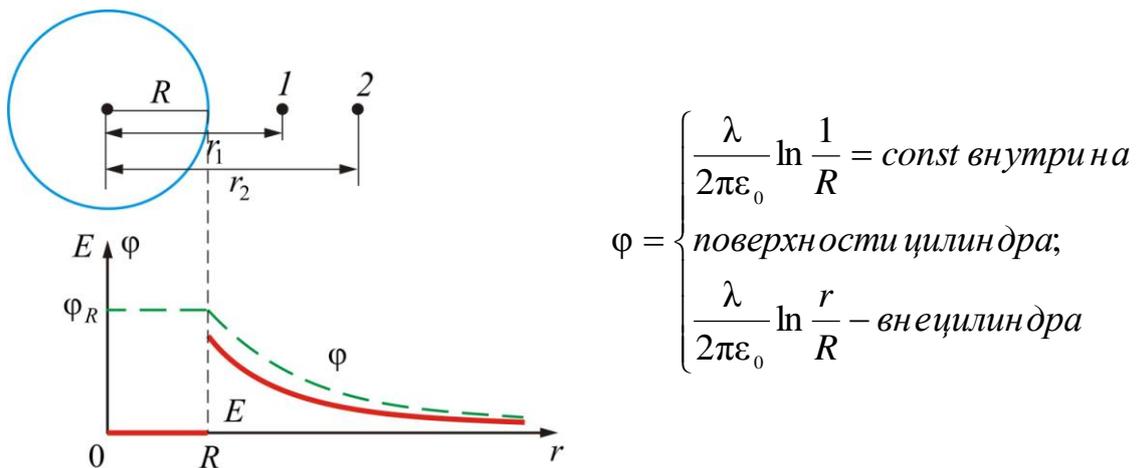


Рис. 1.3.5

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{R} = const & \text{внутри на} \\ \text{поверхности цилиндра;} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R} & \text{вне цилиндра} \end{cases}$$

### Разность потенциалов между обкладками цилиндрического конденсатора

Проведя выкладки, как и в предыдущем случае, получим разность потенциалов, которая будет равна

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (1.3.27)$$

Таким образом, внутри меньшего цилиндра имеем  $\varphi = \text{const}$ ,  $E = 0$ ; между обкладками потенциал уменьшается по логарифмическому закону, а вторая обкладка (вне цилиндров) экранирует электрическое поле, и  $\varphi$  и  $E$  равны нулю:

На рис. 1.3.6 изображена зависимость напряженности  $E$  и потенциала  $\varphi$  от  $r$ .

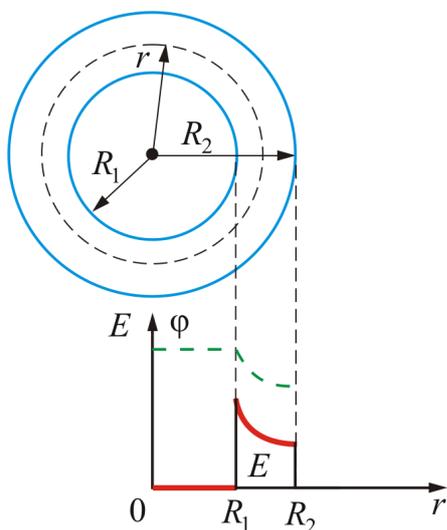


Рис. 1.3.6

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} = \text{const} - \text{внутри меньшего цилиндра } (r < R_1); \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R_1} - \text{между цилиндрами } (R_1 < r < R_2); \\ 0 - \text{вне цилиндров.} \end{cases}$$

### Разность потенциалов между точками поля, образованного заряженной сферической поверхностью

Напряженность поля сферы (рис. 1.3.7) определяется формулой

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Так как  $d\varphi = -E dr$ , то

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \text{ т.е. } \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

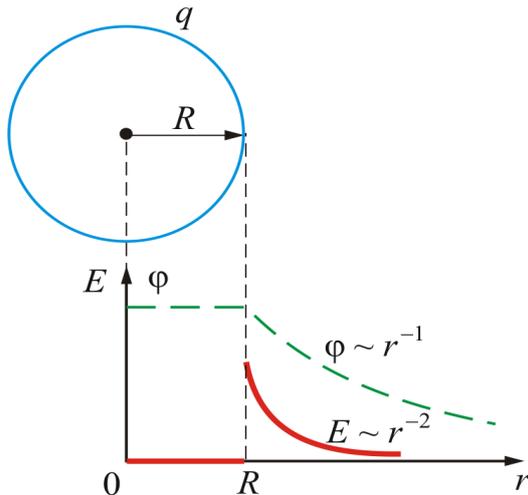


Рис. 1.3.7

$$\varphi = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = \text{const} - \text{внутри и} \\ \text{на поверхности сферы } (r \leq R); \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \text{вне сферы } (r > R). \end{cases}$$

### Разность потенциалов внутри равномерно заряженного шара

Имеем диэлектрический шар (рис. 1.3.8), заряженный с объемной плотностью

$$\rho = \frac{3q}{4\pi R^3}.$$

Напряженность электрического поля внутри равномерно заряженного шара  $E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$ .

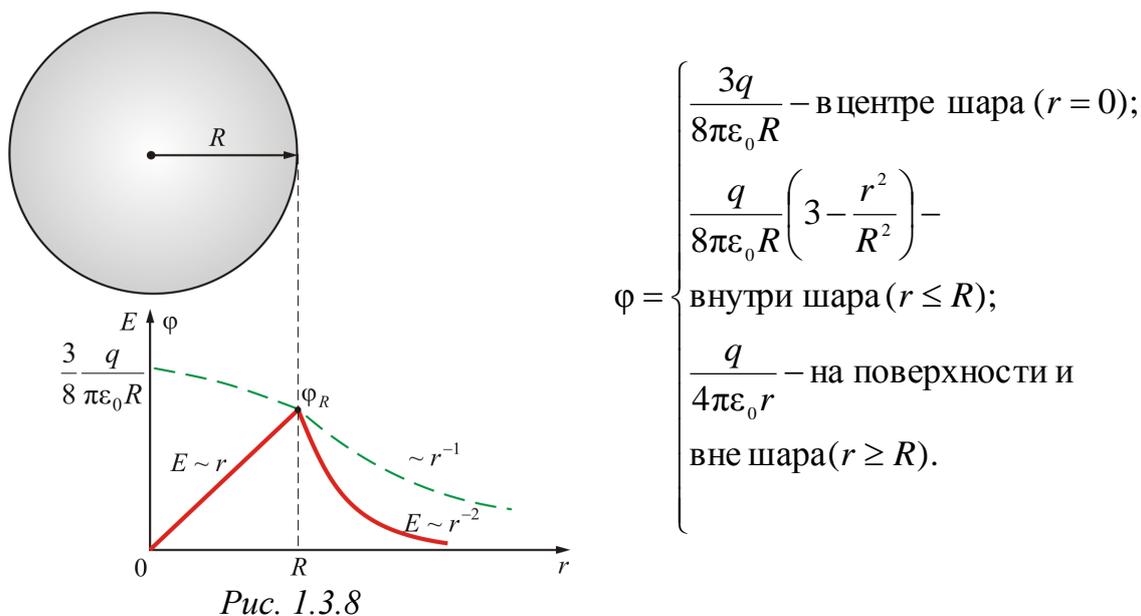
Теперь найдем разность потенциалов внутри шара:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 E dr = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \int_1^2 r dr = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} (r_2^2 - r_1^2),$$

или

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q(r_2^2 - r_1^2)}{4\pi\epsilon_0 2R^3}.$$

Отсюда находим потенциал шара.



Из полученных соотношений можно сделать следующие **выводы**:

- С помощью теоремы Гаусса сравнительно просто можно рассчитать  $E$  и  $\varphi$  от различных заряженных поверхностей.
- Напряженность поля в вакууме изменяется скачком при переходе через заряженную поверхность.
- Потенциал поля – всегда непрерывная функция координат.

### Контрольные вопросы. Упражнения

1. Какова связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля? Выведите ее и объясните. Каков физический смысл этих понятий?
2. Чему равна работа по перемещению заряда вдоль эквипотенциальной поверхности?
3. Дайте определения потенциала данной точки электростатического поля и разности потенциалов двух точек поля. Каковы их единицы?
4. С помощью теоремы Остроградского – Гаусса рассчитайте и изобразите графически:
  - разность потенциалов между точками поля, образованного заряженной бесконечно длинной цилиндрической поверхностью;
  - разность потенциалов между обкладками конденсатора;
  - разность потенциалов между точками поля, образованного заряженной сферической поверхностью;
  - разность потенциалов внутри равномерно заряженного шара.
5. По поверхности сферы радиусом 30 см распределен заряд 4 нКл. Чему равен потенциал в центре сферы?

## 1.4. Диэлектрики в электростатическом поле

### 1.4.1. Поляризация диэлектриков

Все известные в природе вещества, в соответствии с их способностью проводить электрический ток, делятся на **три основных класса: диэлектрики, полупроводники и проводники**. Если удельное сопротивление у проводников равно  $\rho_{\text{пр}} = 10^{-8} - 10^{-6}$  Ом·м, то у диэлектриков  $\rho_{\text{д}} = 10^8 - 10^{18}$  Ом·м, а полупроводники занимают промежуточную область –  $\rho_{\text{д}} > \rho_{\text{п/п}} > \rho_{\text{пр}}$ .

В идеальном диэлектрике свободных зарядов, т.е. способных перемещаться на значительные расстояния (превосходящие расстояния между атомами), нет. Но это не значит, что диэлектрик, помещенный в электростатическое поле, не реагирует на него, что в нем ничего не происходит.

Любое вещество состоит из атомов, образованных положительными ядрами и отрицательными электронами. Поэтому в диэлектриках происходит **поляризация**.

Смещение электрических зарядов вещества под действием электрического поля называется **поляризацией**. Способность к поляризации является основным свойством диэлектриков.

**Поляризация** диэлектрика включает составляющие – электронную, ионную и ориентационную (дипольную). На рис. 1.4.1 проиллюстрированы механизмы этих видов поляризации.

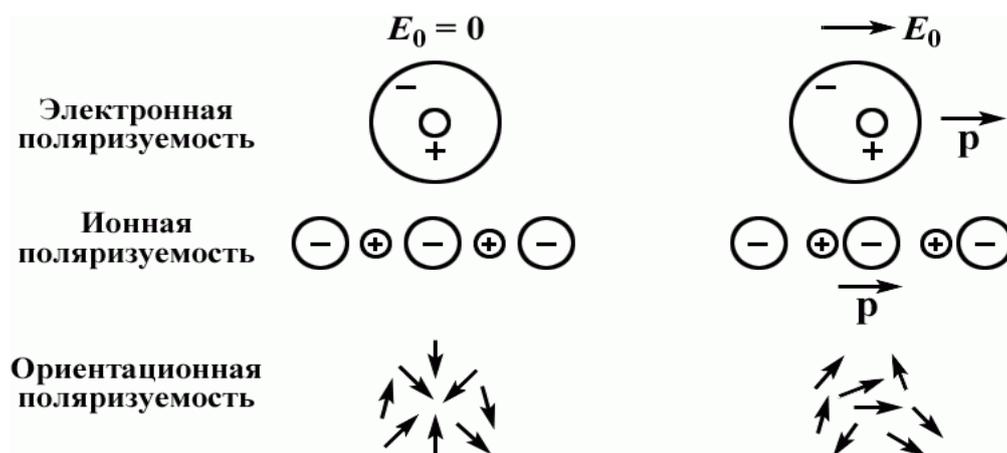


Рис. 1.4.1

Электронная поляризуемость обусловлена смещением электронной оболочки атома относительно ядра. Ионная поляризуемость вызвана смещением заряженных ионов по отношению к другим ионам. Ориен-

тационная (дипольная) поляризуемость возникает, когда вещество состоит из молекул, обладающих постоянными электрическими дипольными моментами, которые могут более или менее свободно изменять свою ориентацию во внешнем электрическом поле.

Есть и другие виды поляризации. Главное в поляризации – смещение зарядов в электростатическом поле. В результате каждая молекула или атом образует электрический момент  $p$  (рис. 1.4.2):

$$p_1 = ql_1, \text{ или } \vec{p}_1 = q\vec{l}_1. \quad (1.4.1)$$

Ясно, что электрический момент  $p$  пропорционален напряженности  $E$  – напряженности электростатического поля в месте нахождения молекулы, т.е. внутри вещества.

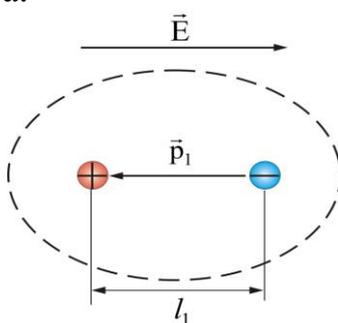


Рис. 1.4.2

На рис. 1.4.3 показан механизм поляризации некоторого объема диэлектрика.

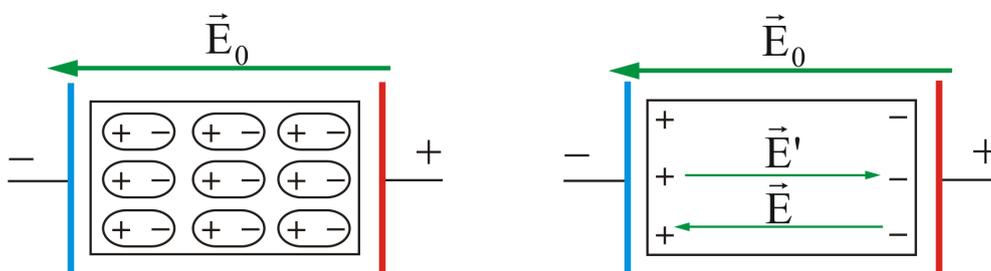


Рис. 1.4.3

Внутри диэлектрика электрические заряды диполей компенсируют друг друга. Но на внешних поверхностях диэлектрика, прилегающих к электродам, появляются заряды противоположного знака (поверхностно связанные заряды).

Пусть  $E'$  – электростатическое поле связанных зарядов. Оно направлено всегда против внешнего поля  $E_0$ . Следовательно, результирующее электростатическое поле внутри диэлектрика

$$E = E_0 - E'. \quad (1.4.2)$$

Итак, электростатическое поле внутри диэлектрика всегда меньше внешнего поля.

Поместим диэлектрик в виде параллелепипеда в электростатическое поле  $\vec{E}_0$  (рис. 1.4.4).

Электрический момент тела  $\vec{p}$  можно найти по формуле

$$\vec{p} = q\vec{l} = \sigma' S\vec{l}, \text{ или } p = \sigma' Sl \cos\varphi, \quad (1.4.3)$$

где  $\sigma'$  – поверхностная плотность связанных зарядов.

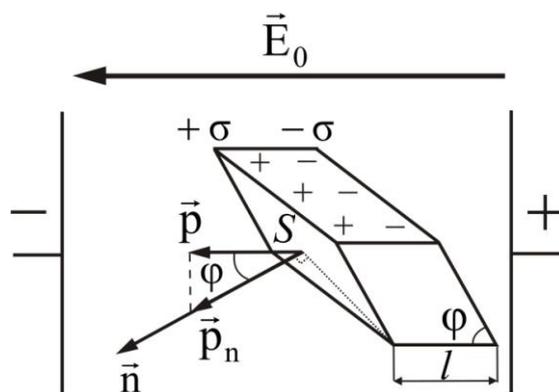


Рис. 1.4.4

Введем новое понятие – **вектор поляризации**  $\vec{P} = \frac{\vec{p}}{V} = \frac{\sum \vec{p}_k}{V}$  – **электрический момент единичного объема**;

$$\vec{P} = \sum_k^n \vec{p}_{1k} = n\vec{p}_1, \quad (1.4.4)$$

где  $n$  – концентрация молекул в единице объема;  $\vec{p}_1$  – электрический момент одной молекулы.

С учетом этого обстоятельства

$$p = PV = PSl \cos\varphi \quad (1.4.5)$$

(т.к.  $V = Sl \cos\varphi$  – объем параллелепипеда).

Приравняем (1.4.3) и (1.4.5) и учтем, что  $P \cos\varphi = P_n$  – проекция  $\vec{P}$  на направление  $\vec{n}$  – вектора нормали, тогда

$$\sigma' = P_n. \quad (1.4.6)$$

**Поверхностная плотность** поляризационных зарядов равна нормальной составляющей вектора поляризации в данной точке поверхности.

Отсюда следует, что **индуцированное** в диэлектрике электростатическое поле  $E'$  будет влиять только на нормальную составляющую вектора напряженности электростатического поля  $\vec{E}$ .

Вектор поляризации можно представить так:

$$\vec{P} = n\vec{p}_1 = n\alpha\varepsilon_0\vec{E} = \chi\varepsilon_0\vec{E}, \quad (1.4.7)$$

где  $\alpha$  – поляризуемость молекул;  $\chi = n\alpha$  – *диэлектрическая восприимчивость* – макроскопическая безразмерная величина, характеризующая поляризацию единицы объема.

Следовательно, и у результирующего поля  $\vec{E}$  изменяется, по сравнению с  $\vec{E}_0$ , только нормальная составляющая. Тангенциальная составляющая поля остается без изменения.

В векторной форме результирующее поле можно представить так:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \quad (1.4.8)$$

Результирующая электростатического поля в диэлектрике равна внешнему полю, деленному на диэлектрическую проницаемость среды  $\varepsilon$ :

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon}. \quad (1.4.9)$$

Величина  $\varepsilon = 1 + \chi$  характеризует электрические свойства диэлектрика. Физический смысл диэлектрической проницаемости среды  $\varepsilon$  – величина, показывающая, во сколько раз электростатическое поле внутри диэлектрика меньше, чем в вакууме:

$$\varepsilon = \frac{E_0}{E}. \quad (1.4.10)$$

С учетом этого обстоятельства, при наличии диэлектрической среды, мы должны поправить все полученные нами в прошлых разделах формулы, например теорема Гаусса:

$$\Phi_E = \frac{\sum q_k}{\varepsilon_0 \varepsilon},$$

или закон Кулона:

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}.$$

График зависимости напряженности поля шара от радиуса, с учетом диэлектрической проницаемости двух сред ( $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ ), показан на рис. 1.4.5.

Как видно из рисунка, напряженность поля  $\vec{E}$  изменяется скачком при переходе из одной среды  $\varepsilon_1$  в другую  $\varepsilon_2$ .

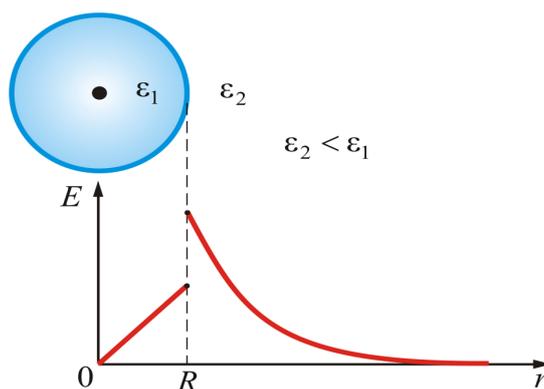


Рис. 1.4.5

### 1.4.2. Различные виды диэлектриков

До сих пор мы рассматривали диэлектрики, которые приобретают электрический момент во внешнем электростатическом поле. Но есть и другие диэлектрики, например: сегнетоэлектрики, пьезоэлектрики.

#### Сегнетоэлектрики

В 1920 г. была открыта *спонтанная* (самопроизвольная) *поляризация*. Сначала её обнаружили у кристаллов сегнетовой соли ( $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ ), а затем и у других кристаллов. Всю эту группу веществ назвали *сегнетоэлектрики* (или *ферроэлектрики*). Детальное исследование диэлектрических свойств этих веществ было проведено в 1930 – 1934 гг. И.В. Курчатовым в ленинградском физическом техникуме. Все сегнетоэлектрики обнаруживают резкую анизотропию свойств (сегнетоэлектрические свойства могут наблюдаться только вдоль одной из осей кристалла). У изотропных диэлектриков поляризация всех молекул одинакова, у анизотропных поляризация и, следовательно, вектор поляризации  $\vec{P}$  в разных направлениях разные. В настоящее время известно несколько сотен сегнетоэлектриков.

Рассмотрим *основные свойства сегнетоэлектриков*:

1. Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  в некотором температурном интервале велика ( $\epsilon \sim 10^3 - 10^4$ ).

2. Значение  $\epsilon$  зависит не только от внешнего поля  $E_0$ , но и от предыстории образца.

3. Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$ , а следовательно и  $P$  нелинейно зависят от напряженности внешнего электростатического поля (*нелинейные диэлектрики*).

Это свойство называется *диэлектрическим гистерезисом*. На рис. 1.4.6 изображена кривая поляризации сегнетоэлектрика – *петля гистерезиса*.

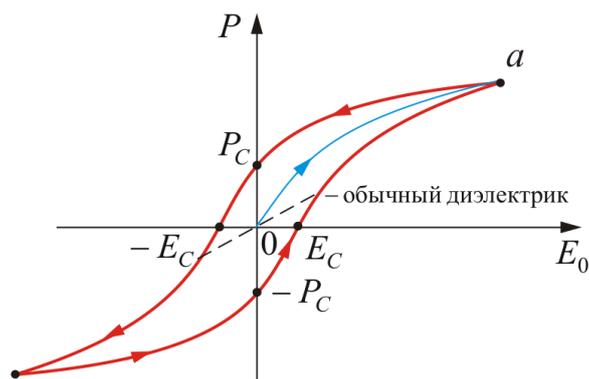


Рис. 1.4.6

Здесь точка *a* – *состояние насыщения*.

При  $E_0 = 0$   $P \neq 0$ ; это говорит о том, что в кристаллах имеется **остаточная поляризованность**  $P_C$ ; чтобы ее уничтожить, необходимо приложить  $E_C$  – **коэрцитивную силу** противоположного направления.

4. Наличие точки Кюри – температуры, при которой сегнетоэлектрические свойства пропадают. При этой температуре происходит фазовый переход 2-го рода. (Например, для титанита бария она равна  $+133$  °С; для сегнетовой соли:  $-18...+24$  °С; для дигидрофосфата калия:  $-150$  °С; для ниобата лития:  $+1210$  °С).

Причиной сегнетоэлектрических свойств является самопроизвольная (спонтанная) поляризация, возникающая под действием особо сильного взаимодействия между частицами, образующими вещество.

Стремление к минимальной потенциальной энергии и наличие дефектов структуры приводят к тому, что сегнетоэлектрик разбит на **домены** (рис. 1.4.7). Без внешнего поля  $P$  электрический импульс кристалла равен нулю (рис. 1.4.7, а). Во внешнем электростатическом поле домены ориентируются вдоль поля (рис. 1.4.7, б).

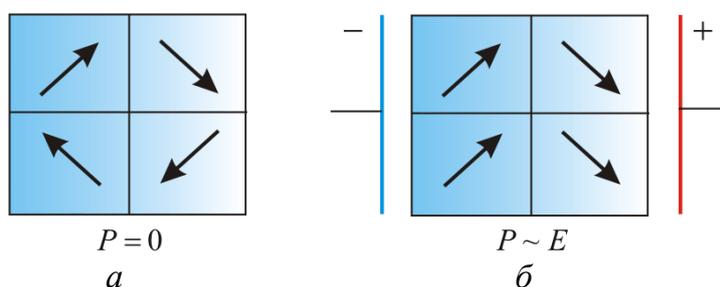


Рис. 1.4.7

Сегнетоэлектрики используются для изготовления многих радиотехнических приборов, например варикондов, – конденсаторов с изменяемой емкостью.

Среди диэлектриков есть вещества, называемые *электреты*, – это диэлектрики, длительно сохраняющие поляризованное состояние после снятия внешнего электростатического поля.

Электреты являются формальными аналогами постоянных магнитов, создающих вокруг себя магнитное поле. Принципиальная возможность получения таких материалов была предсказана Фарадеем. Термин «электрет» был предложен Хевисайдом в 1896 г. по аналогии с английским «magnet» – постоянный магнит, а первые электреты получены японским исследователем Егучи в 1922 г. Егучи охладил в сильном электрическом поле расплав карнаубского воска и канифоли. Электрическое поле сориентировало полярные молекулы, и после охлаждения материал остался в поляризованном состоянии. Для уточнения технологии такие материалы называют *термоэлектретами*.

### Пьезоэлектрики

Некоторые диэлектрики поляризуются не только под действием электростатического поля, но и под действием механической деформации. Это явление называется *пьезоэлектрическим эффектом*.

Явление открыто братьями Пьером и Жаком Кюри в 1880 г.

Если на грани кристалла наложить металлические электроды (обкладки), то при деформации кристалла с помощью силы  $\vec{F}$  на обкладках возникнет разность потенциалов. Если замкнуть обкладки, то потечет ток.

Продемонстрировать пьезоэффект можно рис. 1.4.8.

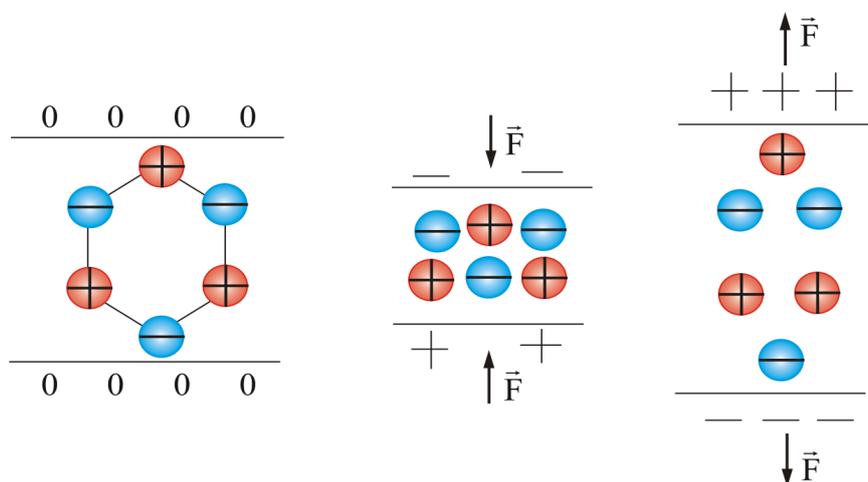


Рис. 1.4.8

Сейчас известно более 1800 пьезокристаллов. Все сегнетоэлектрики обладают пьезоэлектрическими свойствами.

Возможен и обратный пьезоэлектрический эффект. Возникновение поляризации сопровождается механическими деформациями. Если на пьезоэлектрический кристалл подать напряжение, то возникнут механические деформации кристалла, причем деформации будут пропорциональны приложенному электростатическому полю  $E_0$ .

### Пироэлектрики

Кроме сегнетоэлектриков, спонтанно поляризованными диэлектриками являются *пироэлектрики* (от греч. *pur* – огонь). Пироэлектрики – это кристаллические диэлектрики, обладающие спонтанной электрической поляризацией во всей температурной области, вплоть до температуры плавления.

В отличие от сегнетоэлектриков в пироэлектриках поляризация  $P$  линейно зависит от величины внешнего электрического поля, т.е. пироэлектрики являются линейными диэлектриками.

*Пироэлектричество* – появление электрических зарядов на поверхности некоторых кристаллов при их нагревании или охлаждении. При нагревании один конец диэлектрика заряжается положительно, а при охлаждении он же – отрицательно. Появление зарядов связано с изменением существующей поляризации при изменении температуры кристаллов. Типичный пироэлектрик – турмалин.

Все пироэлектрики являются пьезоэлектриками, но не наоборот. Некоторые пироэлектрики обладают сегнетоэлектрическими свойствами. Из сказанного следует, что понятие «пироэлектрик» является более общим, чем «сегнетоэлектрик». Можно сказать, что сегнетоэлектрики есть пироэлектрики с восстанавливаемой внешним полем поляризацией.

В пироэлектриках *поляризация  $P$  линейно зависит* от величины внешнего электростатического поля  $E_0$ , т.е. пироэлектрики являются *линейными диэлектриками*.

В качестве примеров использования различных диэлектриков можно привести следующие:

- сегнетоэлектрики – электрические конденсаторы, ограничители предельно допустимого тока, запоминающие устройства;
- пьезоэлектрики – генераторы ВЧ и пошаговые моторы, микрофоны, наушники, датчики давления, частотные фильтры, пьезоэлектрические адаптеры;
- пироэлектрики – детекторы ИК-излучения, болометры (датчики инфракрасного излучения), электрооптические модуляторы.

### 1.4.3. Вектор электрического смещения $\vec{D}$

Имеем границу раздела двух сред с  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ , так что  $\epsilon_1 < \epsilon_2$  (рис. 1.4.9, а).

Как мы уже показали, в соответствии с (1.4.10),

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}, \text{ или } E_1 = E_2 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1},$$

т.е. напряженность электростатического поля  $E$  изменяется скачком при переходе из одной среды в другую.

Главная задача электростатики – расчет электрических полей, т.е.  $\vec{E}$  в различных электрических аппаратах, кабелях, конденсаторах и т.д. Эти расчеты сами по себе непросты, да еще наличие разного сорта диэлектриков и проводников еще более усложняют задачу.

Для упрощения расчетов была введена новая векторная величина – **вектор электрического смещения** (электрическая индукция):

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}. \quad (1.4.11)$$

Из предыдущих рассуждений  $\vec{E}_1 \epsilon_1 = \vec{E}_2 \epsilon_2$ , тогда  $\epsilon_0 \epsilon_1 \vec{E}_1 = \epsilon_0 \epsilon_2 \vec{E}_2$ , отсюда

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (1.4.12)$$

Таким образом, вектор  $\vec{D}$  остается неизменным при переходе из одной среды в другую (рис. 1.4.9, б), и это облегчает расчет  $\vec{D}$ .

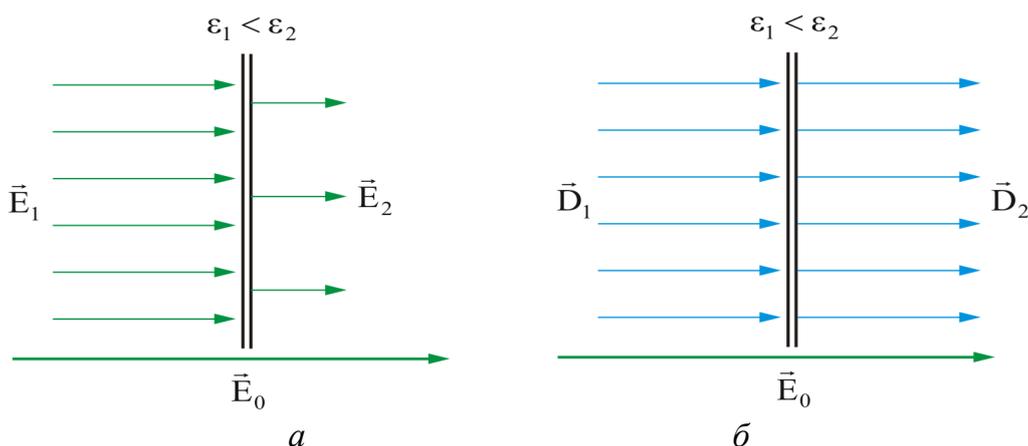


Рис. 1.4.9

Зная  $\vec{D}$  и  $\epsilon$ , легко рассчитать  $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0 \epsilon}$ ;

$\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E} = (1 + \chi)\epsilon_0\vec{E} = \epsilon_0\vec{E} + \chi\epsilon_0\vec{E}$ , отсюда можно записать:

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \quad (1.4.13)$$

где  $\vec{P} = \chi\epsilon_0\vec{E}$  – вектор поляризации;  $\chi$  – диэлектрическая восприимчивость среды, характеризующая поляризацию единичного объема среды.

Таким образом, вектор  $\vec{D}$  есть сумма (линейная комбинация) двух векторов различной природы:  $\vec{E}$  – главной характеристики поля и  $\vec{P}$  – поляризации среды.

В СИ  $[D] = [E] \cdot [\epsilon_0] = \frac{\text{Кл}}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} \frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$ , т.е. это заряд, протекающий через единицу поверхности.

Для точечного заряда в вакууме  $D = \frac{q}{4\pi r^2}$ .

Для  $\vec{D}$  имеет место принцип суперпозиции, как и для  $\vec{E}$ , т.е.

$$\vec{D} = \sum_{k=1}^n \vec{D}_k.$$

#### 1.4.4. Поток вектора электрического смещения.

##### Теорема Остроградского – Гаусса для $\vec{D}$

Аналогично потоку для вектора  $\vec{E}$  ( $\Phi_E = \int_S E_n dS$ ) можно ввести понятие потока для вектора  $\vec{D}$  ( $\Phi_D$ ). Пусть произвольную площадку  $S$  пересекают линии вектора электрического смещения  $\vec{D}$  под углом  $\alpha$  к нормали  $\vec{n}$  (рис. 1.4.10):

$$\Phi_D = \int_S D_n dS.$$

В однородном электростатическом поле  $\Phi_D = DS \cos\alpha = D_n S$ .

Теорему Остроградского – Гаусса для вектора  $\vec{D}$  получим из теоремы Остроградского – Гаусса для вектора  $\vec{E}$ :

$$\Phi_E = \int_S E_n dS = \frac{\sum q_k}{\epsilon_0 \epsilon};$$

т. к. 
$$E_n = \frac{D_n}{\epsilon_0 \epsilon},$$

то 
$$\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} \int_S D_n dS = \frac{\sum q_k}{\epsilon_0 \epsilon}.$$

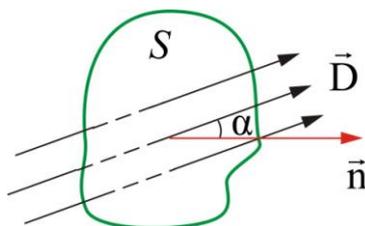


Рис. 1.4.10

**Теорема Остроградского – Гаусса для  $\vec{D}$ :**

$$\Phi_D = \oint_S D_n dS = \sum q_k. \quad (1.4.14)$$

Поток вектора  $\vec{D}$  через любую замкнутую поверхность определяется только свободными зарядами, а не всеми зарядами внутри объема, ограниченного данной поверхностью. Это позволяет не рассматривать связанные (поляризованные) заряды, влияющие на  $\vec{E}$ , и упрощает решение многих задач. В этом смысл введения вектора  $\vec{D}$ .

### 1.4.5. Изменение $\vec{E}$ и $\vec{D}$ на границе раздела двух диэлектриков

Рассмотрим простой случай (рис. 1.4.11): два бесконечно протяженных диэлектрика с  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ , имеющих общую границу раздела, пронизывает внешнее электростатическое поле  $\vec{E}_0$ .

Пусть  $\epsilon_2 > \epsilon_1$ .

Из п. 1.4.3 мы знаем, что  $\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$  и  $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ .

Образовавшиеся поверхностные заряды изменяют только *нормальную составляющую*  $\vec{E}$ , а тангенциальная составляющая остается постоянной (рис. 1.4.11):

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{E_{2\tau} E_{1n}}{E_{2n} E_{1\tau}} = \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1},$$

т.е. направление вектора  $\vec{E}$  изменяется. **Это закон преломления вектора напряженности электростатического поля.**

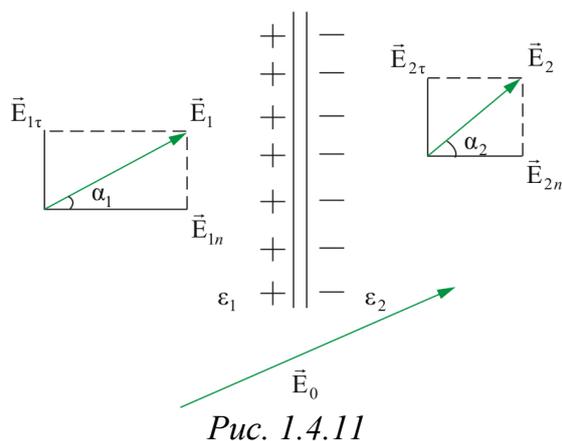


Рис. 1.4.11

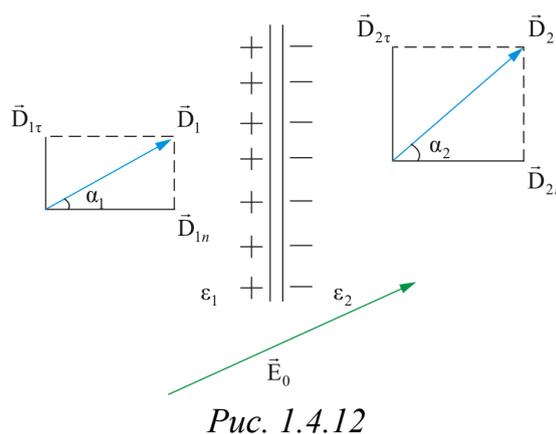


Рис. 1.4.12

Рассмотрим изменение вектора  $\vec{D}$  и его проекций –  $D_n$  и  $D_\tau$  (рис. 1.4.11).

Так как  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$ , то имеем

$$D_{1n} = \epsilon_1 \epsilon_0 E_{1n}; \quad D_{2n} = \epsilon_2 \epsilon_0 E_{2n};$$

$$\frac{D_{1n}}{D_{2n}} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_0 E_{1n}}{\epsilon_2 \epsilon_0 E_{2n}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_0 \epsilon_2 \epsilon_1} = 1,$$

т.е.  $D_{1n} = D_{2n}$  – нормальная составляющая вектора  $\vec{D}$  не изменяется;

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_0 E_{1\tau}}{\epsilon_2 \epsilon_0 E_{2\tau}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2};$$

$$D_{2\tau} = D_{1\tau} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1},$$

т.е. тангенциальная составляющая вектора  $\vec{D}$  увеличивается в  $\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$  раз;

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{D_{2\tau} D_{1n}}{D_{2n} D_{1\tau}} = \frac{D_{2\tau}}{D_{1\tau}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}. \quad (1.4.15)$$

Это **закон преломления вектора  $\vec{D}$** .

Проиллюстрируем на рис. 1.4.13 **закон преломления для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$** .

Как видно из рисунка, при переходе из одной диэлектрической среды в другую вектор  $\vec{D}$  преломляется на тот же угол, что и  $\vec{E}$  ( $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ ). Входя в диэлектрик с большей диэлектрической проницаемостью, линии  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  удаляются от нормали.

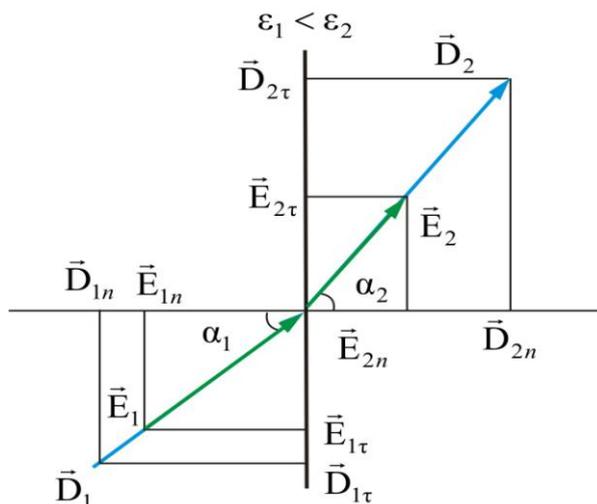
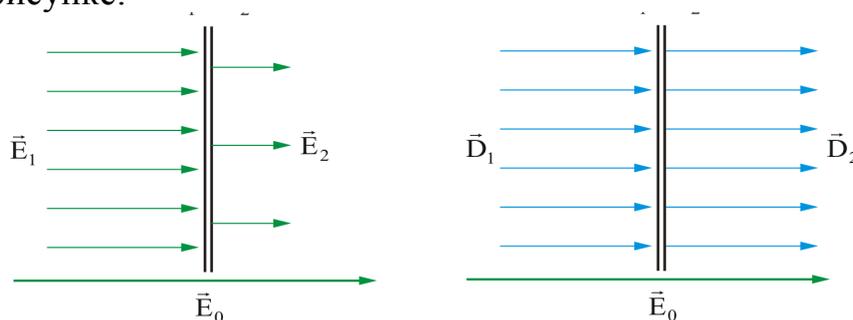


Рис. 1.4.13

### Контрольные вопросы. Упражнения

1. Что такое поляризованность?
2. Что показывает диэлектрическая проницаемость среды?
3. Выведите связь между диэлектрической восприимчивостью вещества и проницаемостью среды.
4. В чем различие поляризации диэлектриков с полярными и неполярными молекулами?
5. Есть ли свободные заряды в идеальном диэлектрике?
6. Какие виды поляризуемости вы знаете?
7. Назовите 3 основных класса веществ в соответствии с их способностью проводить электрический ток
8. Определите, чему равна диэлектрическая проницаемость при построении рисунка:



9. Как определяется вектор электрического смещения? Что он характеризует?
10. Сформулируйте теорему Гаусса для электростатического поля в диэлектрике.
11. Выведите и прокомментируйте условия для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  на границе раздела двух диэлектрических сред.
12. Сформулируйте закон преломления для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$

## 1.5. Проводники в электростатическом поле

### 1.5.1. Напряженность и потенциал электростатического поля в проводнике

В проводниках имеются электрически заряженные частицы – носители заряда (электроны в металлах, ионы в электролитах), способные перемещаться по всему объему проводника под действием внешнего электростатического поля. В настоящем разделе мы ограничимся рассмотрением твердых металлических проводников.

Носителями заряда в металлах являются электроны проводимости. Они возникают при конденсации паров металла за счет обобществления валентных электронов.

При отсутствии электростатического поля металлический проводник является электрически нейтральным – электростатическое поле, создаваемое положительными и отрицательными зарядами внутри него, компенсируется.

При внесении металлического проводника во внешнее электростатическое поле электроны проводимости перемещаются (перераспределяются) до тех пор, пока всюду внутри проводника поле электронов проводимости и положительных ионов не скомпенсирует внешнее поле.

Итак, в любой точке внутри проводника, находящегося в электростатическом поле,  $\vec{E} = 0$ ;  $d\varphi = 0$ , т.е.  $\varphi = \text{const}$ , в идеальном проводнике диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_{\text{ме}} \rightarrow \infty$ .

На поверхности проводника напряженность  $\vec{E}$  (рис. 1.5.1) должна быть направлена по нормали к этой поверхности, иначе под действием составляющей  $E_{\tau}$ , касательной к поверхности, заряды перемещались бы по проводнику, а это противоречило бы их статическому распределению.

Вне заряженного проводника поле есть, следовательно, должен быть вектор  $\vec{E}$ , и направлен он перпендикулярно поверхности.

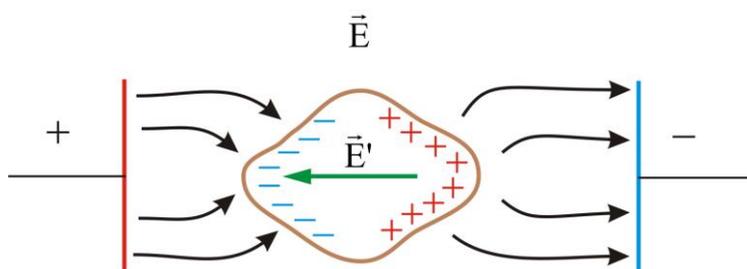


Рис. 1.5.1

Итак, в установившемся состоянии в проводнике, помещенном в электростатическое поле, имеем:

- *Появление у заряженной поверхности на металле заряда противоположного знака – электростатическая индукция. Этот процесс очень краток ( $\sim 10^{-8}$  с).*

- *Электростатическое экранирование – внутрь проводника поле не проникает.*

- *Во всех точках **внутри проводника**  $E = 0$ , а во всех точках на поверхности проводника  $E = E_n (E_\tau = 0)$ ;*

- *Весь объем проводника, находящегося в электростатическом поле, эквипотенциален.*

Действительно, в любой точке внутри проводника  $\frac{d\varphi}{dl} = -E = 0$ , следовательно,  $\varphi = \text{const}$ .

Поверхность проводника тоже эквипотенциальна:  $\varphi_{\text{пов}} = \text{const}$ , т.к.

$$\frac{d\varphi}{dl} = -E_\tau = 0.$$

- *Потенциал на поверхности проводника равен потенциалу внутри проводника.*

- *В заряженном проводнике **некомпенсированные заряды** располагаются только на поверхности (их расталкивают кулоновские силы).*

Можно доказать последнее утверждение формально: проведем внутри проводника произвольную замкнутую поверхность  $S$ , ограничив некоторый объем внутри проводника. Тогда, согласно теореме Остроградского – Гаусса, суммарный заряд  $q$  этого объема равен

$$q = \int_S D dS = \int_S E \epsilon \epsilon_0 dS = 0,$$

т.к.  $E = 0$ .

### 1.5.2. Определение напряженности поля вблизи поверхности заряженного проводника

Выделим на поверхности  $S$  проводника площадку  $dS$  и построим на ней цилиндр с образующими, перпендикулярными к площадке  $dS$ , высотой  $dl$  (рис. 1.5.2):

$$dS' = dS'' = dS.$$

На поверхности проводника вектор напряженности поля  $\vec{E}$  и вектор электрического смещения  $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$  перпендикулярны поверхности. Поэтому поток  $\vec{D}$  сквозь боковую поверхность равен нулю.

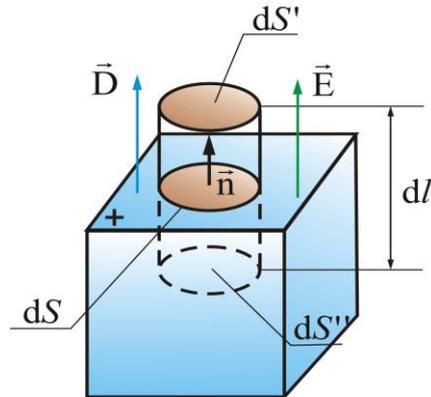


Рис. 1.5.2

Поток вектора электрического смещения  $\Phi_D$  через  $dS''$  тоже равен нулю, т.к.  $dS''$  лежит внутри проводника, где  $\vec{E} = 0$  и, следовательно,  $\vec{D} = 0$ . Отсюда следует, что поток  $d\Phi_D$  сквозь замкнутую поверхность равен потоку  $\vec{D}$  через  $dS'$ :

$$d\Phi_D = D_n dS.$$

С другой стороны, по теореме Остроградского – Гаусса

$$d\Phi_D = dq = \sigma dS,$$

где  $\sigma$  – поверхностная плотность зарядов на  $dS$ . Из равенства правых частей следует, что  $D_n = \sigma$ , тогда

$$E_n = \frac{D_n}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}. \quad (1.5.1)$$

Итак, напряженность поля вблизи поверхности заряженного проводника прямо пропорциональна поверхностной плотности зарядов.

Были рассмотрены поля, создаваемые плоскостью, цилиндром, шаром, и везде получили, что  $E \sim \sigma$ . Этот вывод является общим, т.к. произвольные поверхности есть комбинации указанных выше простейших поверхностей.

### 1.5.3. Экспериментальная проверка распределения заряда на проводнике

Проверим экспериментально сделанные нами выводы.

#### 1. Заряженный кондуктор (рис. 1.5.3).

В местах разной напряженности электростатического поля лепестки бумажки расходятся по-разному: на поверхности 1 – максимальное расхождение, на поверхности 2 заряд распределен равномерно ( $q = \text{const}$ ) и на ней имеем одинаковое расхождение лепестков. На поверхности 3 (внутри кондуктора) зарядов нет и лепестки не расходятся.

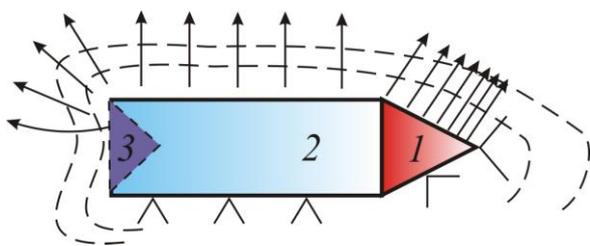


Рис. 1.5.3

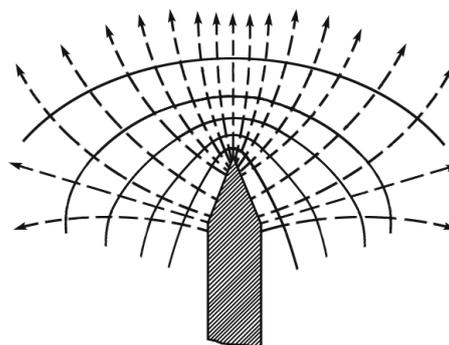


Рис. 1.5.4

Из рис. 1.5.4 видно, что напряженность электростатического поля максимальна на острие заряженного проводника.

### 2. Стеkanie электростатических зарядов с острия.

Большая напряженность поля  $E$  на остриях – нежелательное явление, т.к. происходит утечка зарядов и ионизация воздуха. Ионы уносят электрический заряд, образуется как бы «электрический ветер» («огни Святого Эльма»).

Есть наглядные эксперименты по этому явлению: сдувание пламени свечи электрическим ветром (рис. 1.5.5), колесо Франклина, или вертушка (рис. 1.5.6). На этом принципе построен электростатический двигатель.

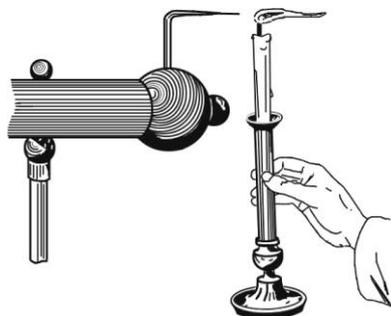


Рис. 1.5.5



Рис. 1.5.6

### 3. Электростатический генератор.

Если заряженный металлический шарик привести в соприкосновение с поверхностью какого-либо проводника, то заряд шарика частично передается проводнику: шарик будет разряжаться до тех пор, пока их потенциалы не выравняются. Иначе обстоит дело, если шарик привести в соприкосновение с внутренней поверхностью полого проводника. При этом весь заряд с шарика стечет на проводник и распределится на внешней поверхности проводника (рис. 1.5.7).

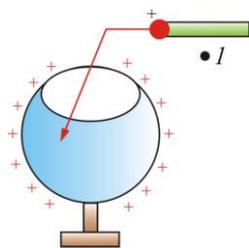


Рис. 1.5.7

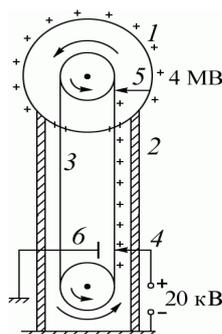
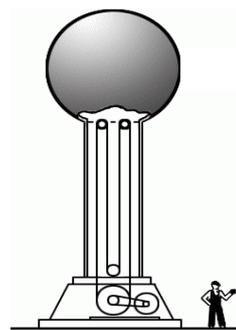


Рис. 1.5.8



Потенциал полого проводника может быть больше, чем потенциал шарика, тем не менее заряд с шарика стечет полностью. В точке  $1$  потенциал шарика меньше потенциала проводника ( $\varphi_{\text{ш}} < \varphi_{\text{пр}}$ ), но пока мы переносили шарик в полость, мы совершили работу по преодолению сил отталкивания и тем самым, увеличивая потенциальную энергию, увеличили потенциал шарика, т.е., когда мы вносим шарик, потенциал его становится больше и заряд, как обычно, перетекает от большего потенциала к меньшему. Переноса с помощью шарика следующую порцию заряда, мы совершаем еще большую работу. Это наглядный пример того, что потенциал – энергетическая характеристика. На этом принципе построен электростатический генератор Ван-де-Граафа.

В 1931 г. Роберт Ван-де-Грааф – американский ученый физик – запатентовал высоковольтный *электростатический ускоритель*, принцип действия которого разработал в 1929 г., и в 1932–1933 гг. спроектировал и построил генератор с диаметром сферы 4,5 м. В 1936 г. он построил самый большой из традиционных генераторов постоянного напряжения.

Устройство *электростатического генератора Ван-де-Граафа* показано на (рис. 1.5.8).

Зарядное устройство  $4$  заряжает ленту транспортера  $3$  положительными зарядами. Лента переносит их вовнутрь металлической сферы  $5$ , где происходит съем этих зарядов. Далее они стекают на внешнюю поверхность  $1$ . Так на поверхности сферы можно получить потенциал относительно Земли в несколько миллионов вольт. Ограничением является ток утечки. Такие генераторы существуют в настоящее время. Например, в Массачусетском технологическом институте построен генератор с диаметром сферы 4,5 метров и получен потенциал  $3\text{--}5 \cdot 10^6$  В.

В Томске хорошо развита ускорительная техника. Так, только в НИИ ядерной физики имеется около десяти ускорителей различного класса. Один из них – ЭСГ, или генератор Ван-де-Граафа. Он изготовлен в специальной башне, и на нем был получен потенциал один миллион вольт.

### Контрольные вопросы. Упражнения

1. Каковы напряженность и потенциал поля, а также распределение зарядов внутри и на поверхности заряженного проводника?
2. На чем основана электростатическая защита?
3. В однородном электростатическом поле заряд переносят из точки  $A$  в точку  $B$ . Сравните работу сил электростатического поля при переносе заряда из одной точки в другую вдоль различных траекторий.
4. Чему равна работа по перемещению зарядов вдоль эквипотенциальной поверхности?
5. Докажите, что в каждой точке эквипотенциальной поверхности вектор напряженности электростатического поля ей перпендикулярен.
6. Нарисуйте линии напряженности и сечения эквипотенциальных поверхностей: а) для отрицательного точечного заряда; б) для двух одинаковых по модулю разноименных зарядов, находящихся на некотором расстоянии друг от друга.
7. Электростатическое поле создано неподвижным положительным зарядом  $q_1$ . На некотором расстоянии от него расположили другой положительный заряд  $q_2$  ( $q_1 < q_2$ ). Увеличится или уменьшится при этом потенциал поля в точке  $A$ ; напряженность поля в точке  $A$ ?
8. Каковы распределение зарядов, напряженность и потенциал поля внутри и на поверхности заряженного проводника?
9. Какова разность потенциалов между любой точкой на поверхности проводящего заряженного шара и любой точкой внутри шара?
10. Коснувшись пробным шариком внутренней поверхности заряженного полого металлического стакана, стрелка электромметра не отклоняется. Коснувшись же внешней поверхности – отклоняется. Поясните результаты данного опыта.
11. Почему вектор напряженности электростатического поля на внешней поверхности проводника направлен по нормали к каждой точке его поверхности?
12. На рис. 1.5.3 изображен заряженный цилиндрический проводник с коническим выступом с одной стороны и впадиной – с другой. Пробный шарик на изолирующей ручке соединен проволокой с электромметром. Сравните показания прибора при перемещении шарика по цилиндрической, конической и внутренней поверхностям проводника. Объясните.
13. Имеется цилиндр из металлической сетки на изолирующей подставке. Внутренняя поверхность сетки соединена с одним электроскопом, наружная – с другим. Если сетку зарядить (например, натертой стеклянной палочкой), то листочки на электроскопе внутри сетки не расходятся, а листочке другого электроскопа расходятся. Поясните этот опыт.

## 1.6. Конденсаторы

### 1.6.1. Электрическая емкость

При сообщении проводнику заряда на его поверхности появляется потенциал  $\varphi$ , но если этот же заряд сообщить другому проводнику, то потенциал будет другой. Это зависит от геометрических параметров проводника. Но в любом случае потенциал  $\varphi$  пропорционален заряду  $q$ :

$$q = C\varphi. \quad (1.6.1)$$

Коэффициент пропорциональности  $C$  называют *электроемкостью* – физическая величина, численно равная заряду, который необходимо сообщить проводнику для того, чтобы изменить его потенциал на единицу:

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (1.6.2)$$

Единица измерения емкости в СИ – фарада;  $1 \text{ Ф} = 1 \text{ Кл/1 В}$ .  
Если потенциал поверхности шара

$$\varphi_{\text{шар}} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R}, \quad (1.6.3)$$

то

$$C_{\text{шар}} = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R. \quad (1.6.4)$$

По этой формуле можно рассчитать емкость Земли. Если диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon = 1$  (воздух, вакуум) и  $R = R_{\text{Земли}}$ , то имеем, что  $C_3 = 7 \cdot 10^{-4} \text{ Ф}$ , или  $700 \text{ мкФ}$ .

Чаще на практике используют более мелкие единицы емкости:  $1 \text{ нФ}$  (нанофарада) =  $10^{-9} \text{ Ф}$  и  $1 \text{ пкФ}$  (пикофарада) =  $10^{-12} \text{ Ф}$ .

Необходимость в устройствах, накапливающих заряд, есть, а уединенные проводники обладают малой емкостью. Опытным путем было обнаружено, что электроемкость проводника увеличивается, если к нему поднести другой проводник, за счет явления *электростатической индукции*.

**Конденсатор** – это устройство для накопления заряда и энергии электрического поля. Состоит из двух проводников в форме пластин, называемых *обкладками*, разделенных диэлектриком. Толщина диэлектрика мала по сравнению с размерами пластин (рис.1.6.1).

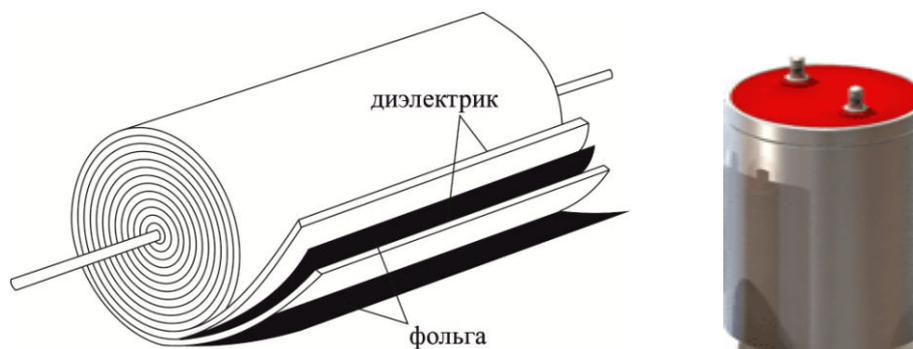


Рис. 1.6.1

Конструкция такова, что внешние, окружающие конденсатор тела, не оказывают влияние на его емкость. Это будет выполняться, если электростатическое поле будет сосредоточено внутри конденсатора, между обкладками.

Конденсаторы бывают плоские, цилиндрические и сферические.

Так как электростатическое поле находится внутри конденсатора, то линии электрического смещения начинаются на положительной обкладке, заканчиваются на отрицательной и никуда не исчезают. Следовательно, заряды на обкладках *противоположны по знаку, но одинаковы по величине*.

Емкость конденсатора равна отношению заряда к разности потенциалов между обкладками конденсатора:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}. \quad (1.6.5)$$

Помимо емкости каждый конденсатор характеризуется  $U_{\text{раб}}$  (или  $U_{\text{пр}}$ ) – максимальное допустимое напряжение, выше которого происходит пробой между обкладками конденсатора.

### 1.6.2. Соединение конденсаторов

**Емкостные батареи** – комбинации параллельных и последовательных соединений конденсаторов (рис. 1.6.2, 1.6.3).

#### 1. Параллельное соединение конденсаторов (рис. 1.6.2).

В данном случае общим является напряжение  $U$ :

$$q_1 = C_1 U; \quad q_2 = C_2 U.$$

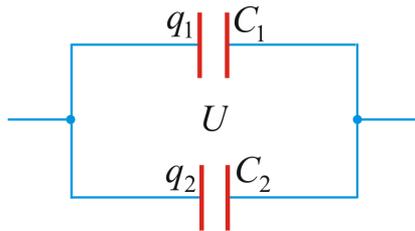


Рис. 1.6.2

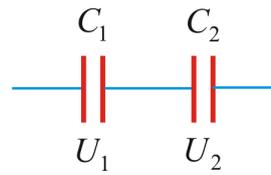


Рис. 1.6.3

Суммарный заряд

$$q = q_1 + q_2 = U(C_1 + C_2).$$

Результирующая емкость

$$C = \frac{q}{U} = C_1 + C_2.$$

Таким образом, при параллельном соединении конденсаторов суммарная емкость

$$C = \sum_k C_k.$$

Общая емкость больше самой большой емкости, входящей в батарею.

Сравните с параллельным соединением сопротивлений  $R$ :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

## 2. Последовательное соединение конденсаторов (рис. 1.6.3):

Общим является заряд  $q$ :

$$U_1 = \frac{q}{C_1}; U_2 = \frac{q}{C_2},$$

или

$$U = \sum_k U_k = q \sum_k \frac{1}{C_k},$$

отсюда

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (1.6.6)$$

Сравните с последовательным соединением сопротивлений  $R$ :

$$R = R_1 + R_2.$$

Таким образом, при последовательном соединении конденсаторов общая емкость меньше самой маленькой емкости, входящей в батарею:

$$\frac{1}{C} = \sum_k \frac{1}{C_k}.$$

### 1.6.3. Расчет емкостей различных конденсаторов Емкость плоского конденсатора

Напряженность поля внутри конденсатора (рис. 1.6.4) равна

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}.$$

Напряжение между обкладками равно

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} d,$$

где  $d = x_2 - x_1$  – расстояние между пластинами.

Так как заряд  $q = \sigma S$ , то

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \epsilon_0 \epsilon \frac{S}{d}. \quad (1.6.7)$$

Как видно из формулы, диэлектрическая проницаемость вещества очень сильно влияет на емкость конденсатора. Это можно увидеть и экспериментально: заряжаем электроскоп, подносим к нему металлическую пластину – получили конденсатор (за счет электростатической индукции потенциал увеличился). Если внести между пластинами диэлектрик с  $\epsilon$ , больше, чем у воздуха, то емкость конденсатора увеличится.

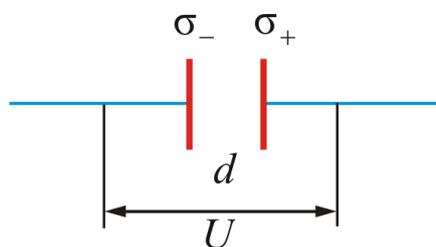


Рис. 1.6.4

Из (1.6.7) можно получить единицы измерения  $\epsilon_0$ :

$$\epsilon_0 = \frac{Cd}{\epsilon S}; \quad (1.6.8)$$

$$[\epsilon_0] = \frac{[C] \cdot [d]}{[S]} = \frac{\Phi \cdot \text{м}}{\text{м}^2} = \frac{\Phi}{\text{м}}.$$

### Емкость цилиндрического конденсатора

Разность потенциалов между обкладками цилиндрического конденсатора, изображенного на рис. 1.6.5, может быть рассчитана по формуле

$$\Delta\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1},$$

где  $\lambda$  – линейная плотность заряда;  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы цилиндрических обкладок;  $l$  – длина конденсатора;  $q = \lambda l$ .

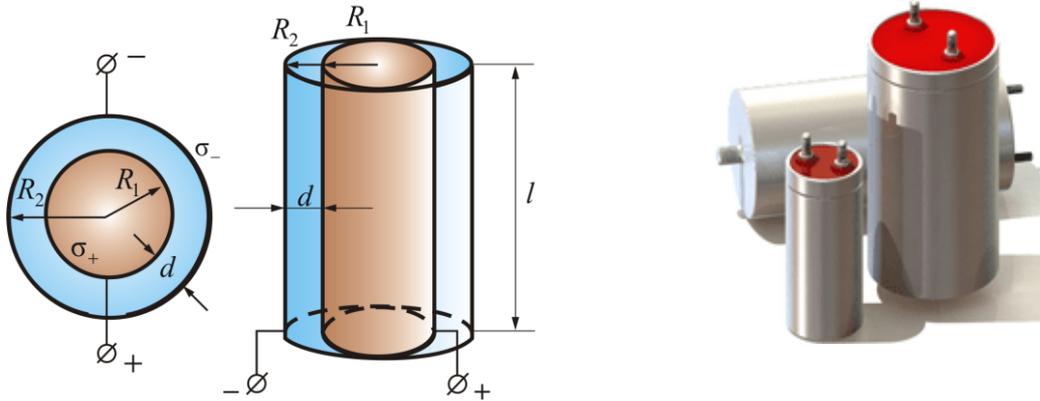


Рис. 1.6.5

Тогда, т. к.  $C = \frac{q}{\Delta\varphi}$ , получим

$$C_{\text{цил}} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (1.6.9)$$

Понятно, что зазор между обкладками мал:  $d = R_2 - R_1$ , т.е.  $d \ll R_1$ .

Тогда  $\ln \frac{R_2}{R_1} \approx \frac{R_2 - R_1}{R_1}$ ;

$$C_{\text{цил}} \approx \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l R_1}{R_2 - R_1} = \epsilon_0\epsilon \frac{S}{d}. \quad (1.6.10)$$

### Емкость шарового конденсатора (рис. 1.6.6)

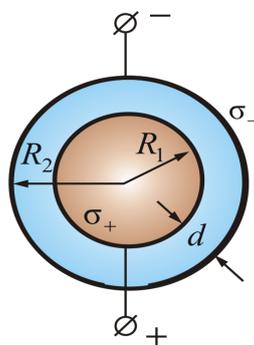


Рис. 1.6.6

Из п. 3.6 мы знаем, что разность потенциала между обкладками равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Тогда, т.к.  $C = \frac{q}{\Delta\varphi}$ , получим

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Это емкость шарового конденсатора, где  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы шаров.

В шаровом конденсаторе  $R_1 \approx R_2$ ;  $S = 4\pi R^2$ ;  $R_2 - R_1 = d$  – расстояние между обкладками. Тогда

$$C_{\text{шар}} \approx \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon R^2}{d} = \epsilon_0\epsilon \frac{S}{d}. \quad (1.6.11)$$

Таким образом, емкость шарового конденсатора с достаточной степенью точности можно рассчитать так же, как и емкость плоского и цилиндрического конденсаторов.

#### 1.6.4. Энергия электростатического поля

В пределах электростатики невозможно дать ответ на вопрос, где сосредоточена энергия конденсатора. Поля и заряды, их образовавшие, не могут существовать обособленно. Их не разделить. Однако переменные поля могут существовать независимо от возбуждавших их зарядов (излучение солнца, радиоволны...), и они переносят энергию. Эти факты заставляют признать, что *носителем энергии является электростатическое поле*.

При перемещении электрических зарядов силы кулоновского взаимодействия совершают определенную работу  $\delta A$ . Работа, совершенная системой, определяется убылью энергии взаимодействия  $-dW$  зарядов:

$$\delta A = -dW. \quad (1.6.12)$$

Энергия взаимодействия двух точечных зарядов ( $q_1$  и  $q_2$ ), находящихся на расстоянии  $r_{12}$ , численно равна работе по перемещению заряда  $q_1$  в поле неподвижного заряда  $q_2$  из точки с потенциалом

$\varphi_1 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$  в точку с потенциалом  $\varphi_1 + d\varphi_1$ :

$$\delta A = -q_1 d\varphi_1 = -d \left( \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \right) = -dW;$$

$$W = q_1\varphi_1 = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0r_{12}} + W_0.$$

Будем считать аддитивную постоянную  $W_0$  равной нулю. В этом случае  $W$  может быть и отрицательной величиной, если  $(q_1$  и  $q_2)$  – заряды противоположного знака.

Аналогично можно рассчитать энергию двух зарядов, рассмотрев перемещение заряда  $q_2$  в поле неподвижного заряда  $q_1$  из точки с потенциалом  $\varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0r_{12}}$  в точку с потенциалом  $\varphi_2 + d\varphi_2$ :

$$\delta A = -q_2d\varphi_2 = -d\left(\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0r_{12}}\right) = -dW;$$

$$W = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0r_{12}}. \quad (1.6.13)$$

Удобно записать энергию взаимодействия двух зарядов в симметричной форме:

$$W = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2). \quad (1.6.14)$$

Взаимная энергия системы  $n$  зарядов равна

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n q_k \varphi_k = \frac{1}{2} \sum_{k,i=1}^n \frac{q_k q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{ki}} \quad (k \neq i). \quad (1.6.15)$$

Данная формула справедлива лишь в случае, если расстояние между зарядами заметно превосходит размеры самих зарядов.

**Рассчитаем энергию заряженного конденсатора.** Конденсатор состоит из двух, первоначально незаряженных, пластин. Будем постепенно отнимать у нижней пластины заряд  $dq$  и переносить его на верхнюю пластину (рис. 1.6.7).

В результате между пластинами возникнет разность потенциалов  $\varphi_2 - \varphi_1$ . При переносе каждой порции заряда совершается элементарная работа

$$\delta A = -dq(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Воспользовавшись определением емкости  $C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$ , получаем

$$\delta A = \frac{q dq}{C}.$$

Общая работа, затраченная на увеличение заряда пластин конденсатора от 0 до  $q$ , равна

$$A = \int_0^q \delta A = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{q^2}{2C}. \quad (1.6.16)$$

При вычислении интеграла учтено, что емкость  $C$  не зависит от  $q$  и  $\varphi$ . Величина полной работы  $A$  равна энергии, запасенной конденсатором,

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q(\varphi_1 - \varphi_2)}{2} = \frac{qU}{2}. \quad (1.6.17)$$

Эту энергию можно также записать в виде

$$W = \frac{1}{2} C(\varphi_1 - \varphi_2)^2 = \frac{1}{2} CU^2. \quad (1.6.18)$$

Запасание энергии конденсатором наглядно проявляется при его подключении к электрической лампочке. Лампочка вспыхивает и гаснет при разрядке конденсатора (рис. 1.6.8).

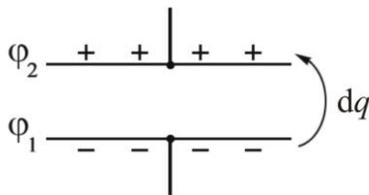


Рис. 1.6.7

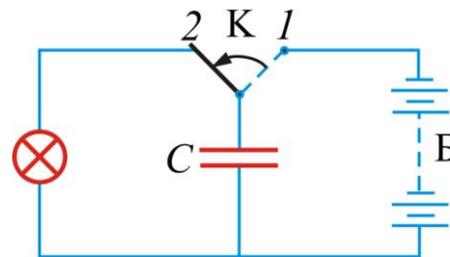


Рис. 1.6.8

Вспомним понятие **пондермоторные силы** – силы электрического взаимодействия между пластинами конденсатора (п. 1.2.4). Эту силу можно вычислить через энергию взаимодействия.

При незначительном перемещении одной пластины в поле другой совершается работа

$$\delta A = -dW = Fdx,$$

отсюда

$$F = -\frac{dW}{dx}.$$

Продифференцируем выражение для энергии конденсатора (1.6.17) и, подставив значение емкости конденсатора  $C$ , получим

$$F = -\frac{dW}{dx} = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}.$$

Модуль этого выражения дает величину **пондермоторной** силы

$$F = \frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}. \quad (1.6.19)$$

### Контрольные вопросы. Упражнения

1. Три одинаковых конденсатора один раз соединены последовательно, другой – параллельно. Во сколько раз и когда емкость батареи будет больше?
2. Может ли электростатика ответить на вопрос: где локализована энергия и что является ее носителем – заряды или поле? Почему?
3. . Чему равна емкость (в мкФ) конденсатора, если при увеличении его заряда на 30 мкКл разность потенциалов между пластинами увеличивается на 10 В?
4. . Во сколько раз увеличится емкость плоского конденсатора, если площадь пластин увеличить в 8 раз, а расстояние между ними уменьшить в 2 раза?
5. . Плоский воздушный конденсатор присоединен к источнику напряжения с ЭДС 200 В. На сколько уменьшится напряженность (в кВ/м) электрического поля в конденсаторе, если расстояние между пластинами увеличить от 1 см до 2 см?
6. . С каким ускорением поднимается вертикально вверх пылинка массой  $10^{-7}$  г, несущая заряд 1,77 пКл, в плоском конденсаторе с поверхностной плотностью заряда на обкладках  $6 \text{ нКл/м}^2$ ?
7. . С какой силой (в мН) притягиваются друг к другу обкладки плоского воздушного конденсатора? Заряд конденсатора 6 мкКл, напряженность поля в конденсаторе 3 кВ/м.
8. . Два конденсатора, рассчитанные на максимальное напряжение 300 В каждый, но имеющие различные емкости 500 и 300 пФ, соединены последовательно. Какое наибольшее напряжение можно приложить к такому составному конденсатору?
9. . Одну пластину незаряженного конденсатора, обладающего емкостью 1 нФ, заземляют, а другую присоединяют длинным тонким проводом к удаленному проводящему шару радиусом 20 см, имеющему заряд 92 мкКл. Какой заряд (в мкКл) останется на шаре?
10. . Два одинаковых воздушных конденсатора соединены последовательно и присоединены к источнику постоянного напряжения. У одного из них втрое увеличивают расстояние между пластинами. Во сколько раз уменьшится напряженность поля в этом конденсаторе?
11. . Два конденсатора, емкость одного из которых в 4 раза больше, чем емкость другого, соединили последовательно и подключили к источнику напряжения с ЭДС 75 В. Затем заряженные конденсаторы отключили от источника и друг от друга и соединили параллельно. Чему будет равно после этого напряжение на конденсаторах?

**Сравнительные характеристики гравитационного и электростатического полей**

Таблица 1

Сравнительные характеристики	Виды полей	
	Гравитационное	Электростатическое
Масса, заряд	$m$	$q$
Сила	$F = \gamma \frac{mM}{r^2}$	$F = k_0 \frac{qQ}{r^2}$
Напряженность поля	$G = \gamma \frac{M}{r^2}$	$E = k_0 \frac{Q}{r^2}$
Связь напряженности с силой	$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}$	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$
Принцип суперпозиции	$\vec{G} = \sum \vec{G}_i$	$\vec{E} = \sum \vec{E}_i$
Потенциал поля	$\varphi = \gamma \frac{M}{r}$	$\varphi = k_0 \frac{Q}{r}$
Сложение потенциалов	$\varphi = \sum \varphi_i$	$\varphi = \sum \varphi_i$
Связь $\vec{G}$ и $\varphi$	$\vec{G} = -\text{grad} \varphi = -\nabla \varphi$	$\vec{E} = -\text{grad} \varphi = -\nabla \varphi$
Работа по перемещению тела или заряда	$A = m \left( \frac{\gamma M}{r_2} - \frac{\gamma M}{r_1} \right) = m (\varphi_2 - \varphi_1)$	$A = q \left( \frac{k_0 Q}{r_2} - \frac{k_0 Q}{r_1} \right) = q (\varphi_2 - \varphi_1)$
Работа по замкнутому контуру	$A = \oint_L \vec{F} d\vec{r} = 0$	$A = \oint_L \vec{F} d\vec{r} = 0$
Циркуляция вектора напряженности	$\oint_L \vec{G} d\vec{l} = 0$	$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$
Потенциальная энергия	$U = \gamma \frac{mM}{r}$	$U = k_0 \frac{qQ}{r}$
Связь потенциала с энергией	$\varphi = \frac{U}{m}$	$\varphi = \frac{U}{q}$
Связь силы с энергией	$\vec{F} = -\text{grad} U$	$\vec{F} = -\text{grad} U$
Теор. Гаусса в интегр. форме	$\Phi_G = \oint_S \vec{G} d\vec{S} = 4\pi\gamma M$	$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi k_0 Q$
Теорема Гаусса в диф. форме	$\text{div} \vec{G} = \nabla \vec{G} = 4\pi\gamma\rho$	$\text{div} \vec{E} = \nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0} = 4\pi k_0 \rho$
Безвихревое поле	$\text{rot} \vec{G} = 0$	$\text{rot} \vec{E} = 0$

## 1.7. Постоянный электрический ток

### 1.7.1. Характеристики электрического тока

Упорядоченное движение заряженных частиц называется электрическим током.

Количественной мерой тока служит **сила тока**  $I$ , т.е. заряд, перенесенный сквозь рассматриваемую поверхность  $S$  (или через поперечное сечение проводника) в единицу времени, т.е.

$$I = \frac{\partial q}{\partial t}. \quad (1.7.1)$$

Ток, не изменяющийся по величине со временем, называется **постоянным током**:

$$I = \frac{q}{t},$$

отсюда видна размерность силы тока в СИ:  $1 \text{ А} = \text{Кл}/\text{с}$ .

**Плотность тока** – более подробная характеристика тока, чем сила тока  $I$ . Плотность тока характеризует ток локально, в каждой точке пространства, а  $I$  – это интегральная характеристика, привязанная не к точке, а к области пространства, в которой протекает ток.

Модуль вектора плотности тока численно равен отношению силы тока  $\partial I$  через элементарную площадку  $\partial S$ , перпендикулярную направлению движения носителей заряда, к ее площади:

$$j = \frac{\partial I}{\partial S_{\perp}}. \quad (1.7.2)$$

Единица плотности тока –  $\text{А}/\text{м}^2$ .

За направление вектора  $\vec{j}$  принимают направление вектора  $\vec{v}_{\text{др}}$  **положительных** носителей зарядов (раньше не знали о существовании отрицательных носителей зарядов и приняли так). Если носителями являются как положительные, так и отрицательные заряды, то плотность тока определяется формулой:

$$\vec{j} = q_+ n_+ \vec{v}_{\text{др}+} + q_- n_- \vec{v}_{\text{др}-},$$

где  $q_+ n_+$  и  $q_- n_-$  – объемные плотности соответствующих зарядов.

Поле вектора  $\vec{j}$  можно изобразить графически с помощью **линий тока**, которые проводят так же, как и линии вектора напряженности  $\vec{E}$  (рис. 1.7.1).

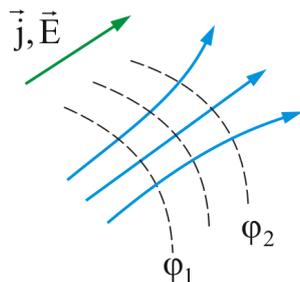


Рис. 1.7.1

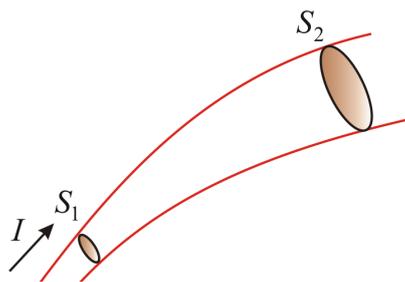


Рис. 1.7.2

### 1.7.2. Уравнение непрерывности

Если внутри проводника, по которому течет электрический ток, выделить какой-то объем, ограниченный замкнутой поверхностью  $S$  (рис 1.7.2), то, согласно закону сохранения электрического заряда, суммарный электрический заряд  $q$ , охватываемый поверхностью  $S$ , изменяется за время  $\partial t$  на  $\partial q = -I\partial t$ , тогда **в интегральной форме** можно записать:

$$\oint_S \vec{j} \partial \vec{S} = -\frac{\partial q}{\partial t}. \quad (1.7.3)$$

Это соотношение называется **уравнением непрерывности**. Оно является, по существу, выражением **закона сохранения электрического заряда**.

**Дифференциальная форма записи уравнения непрерывности** записывается так:

$$\nabla \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \text{или} \quad \text{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (1.7.4)$$

В случае постоянного тока распределение зарядов в пространстве должно оставаться неизменным:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = 0,$$

следовательно,

$$\oint \vec{j} \partial \vec{S} = 0 \quad (1.7.5)$$

– это **уравнение непрерывности для постоянного тока** (в интегральной форме).

Линии  $\vec{j}$  в этом случае нигде не начинаются и нигде не заканчиваются. Поле вектора  $\vec{j}$  не имеет источника. В дифференциальной форме уравнение непрерывности для постоянного тока  $\nabla \vec{j} = 0$ .

### 1.7.3. Сторонние силы и ЭДС

Для того чтобы поддерживать ток достаточно длительное время, необходимо от конца проводника с меньшим потенциалом непрерывно отводить, а к другому концу – с большим потенциалом – подводить электрические заряды, т.е. необходим круговорот зарядов. Поэтому в замкнутой цепи, наряду с нормальным движением зарядов, должны быть участки, на которых движение (положительных) зарядов происходит в направлении возрастания потенциала, т.е. против сил электрического поля (рис. 1.7.1).

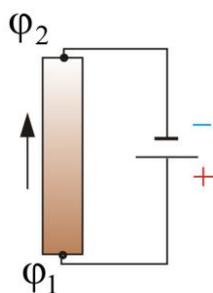


Рис. 1.7.1

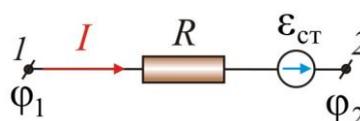


Рис. 1.7.2

Перемещение заряда на этих участках возможно лишь с помощью сил неэлектрического происхождения (сторонних сил): химические процессы, диффузия носителей заряда, вихревые электрические поля. Аналогия – насос, качающий воду в водонапорную башню, действует за счет негравитационных сил (электромотор).

Сторонние силы можно характеризовать работой, которую они совершают над перемещающимися по замкнутой цепи или ее участку зарядами (рис.1.7.2).

Величина  $\mathcal{E}$ , равная работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда в цепи, называется **электродвижущей силой** (ЭДС), действующей в цепи:

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q} \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} \right] = [\text{В}]. \quad (1.7.6)$$

Как видно из (1.7.6), размерность ЭДС совпадает с размерностью потенциала, т.е. измеряется в вольтах.

### 1.7.4. Закон Ома для неоднородного участка цепи

Рассмотрим неоднородный участок цепи, участок, содержащий источник ЭДС (т.е. участок, где действуют неэлектрические силы). Напряженность  $\vec{E}$  поля в любой точке цепи равна векторной сумме поля кулоновских сил и поля сторонних сил, т.е.  $\vec{E} = \vec{E}_k + \vec{E}_{\text{ст}}$ .

Величина, численно равная работе по переносу единичного положительного заряда суммарным полем кулоновских и сторонних сил на участке цепи (1-2), называется **напряжением**  $U_{12}$  на этом участке (рис. 1.7.2):

$$U_{12} = \int_1^2 \vec{E}_q d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}_{ст} d\vec{l}, \quad (1.7.7)$$

т.к.  $\vec{E}_q d\vec{l} = -d\varphi$ , или  $\int_1^2 \vec{E}_q d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2$ , тогда

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}. \quad (1.7.8)$$

Напряжение на концах участка цепи совпадает с разностью потенциалов только в случае, если на этом участке нет ЭДС, т.е. на однородном участке цепи. Запишем **обобщенный закон Ома для участка цепи, содержащей источник ЭДС**:

$$IR_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}. \quad (1.7.9)$$

Обобщенный закон Ома выражает закон сохранения энергии применительно к участку цепи постоянного тока. Он в равной мере справедлив как для пассивных участков (не содержащих ЭДС), так и для активных.

В электротехнике часто используют термин **падение напряжения** – изменение напряжения вследствие переноса заряда через сопротивление:

$$U = IR. \quad (1.7.10)$$

**В замкнутой цепи** (рис. 1.7.3)  $\varphi_1 = \varphi_2$ :  $IR_{\Sigma} = \mathcal{E}$ , или  $I = \frac{\mathcal{E}}{R_{\Sigma}}$ ,

где  $R_{\Sigma} = R + r$ ;  $r$  – внутреннее сопротивление активного участка цепи.

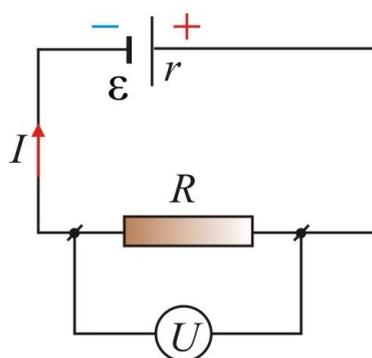


Рис. 1.7.3

Тогда **закон Ома для замкнутого участка цепи, содержащего источник ЭДС**, запишется в виде

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (1.7.11)$$

### 1.7.5. Закон Ома в дифференциальной форме

Закон Ома в интегральной форме для однородного участка цепи (не содержащего ЭДС) –

$$I = \frac{U}{R}. \quad (1.7.12)$$

Для однородного линейного проводника выразим  $R$  через  $\rho$ :

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (1.7.13)$$

где  $\rho$  – удельное объемное сопротивление;  $[\rho] = [\text{Ом} \cdot \text{м}]$ .

Найдем связь между  $\vec{j}$  и  $\vec{E}$  в бесконечно малом объеме проводника – *закон Ома в дифференциальной форме*.

Исходя из закона Ома (7.6.1), имеем

$$I = \frac{U}{R} = \frac{Edl}{\rho \frac{dl}{dS}} = \frac{EdS}{\rho}.$$

А мы знаем, что  $j = \frac{dI}{dS} = \frac{1}{\rho} E$ , или  $\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$ . Отсюда можно записать:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (1.7.14)$$

– это запись *закона Ома в дифференциальной форме*.

Здесь  $\sigma = 1/\rho$  – *удельная электропроводность*.

Размерность  $\sigma$  –  $[\text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}]$ .

Плотность тока можно выразить через заряд электрона  $e$ , количество зарядов  $n$  и дрейфовую скорость  $\vec{v}$ :

$$\vec{j} = en\vec{v}. \quad (1.7.15)$$

Пусть  $b = \frac{\vec{v}}{\vec{E}}$ , тогда  $\vec{v} = b\vec{E}$  и плотность тока  $\vec{j} = enb\vec{E}$ .

Если удельную электропроводность  $\sigma$  выразить через  $e$ ,  $n$  и  $b$  ( $\sigma = enb$ ), то вновь получим выражение *закона Ома в дифференциальной форме*:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

### 1.7.6. Работа и мощность тока. Закон Джоуля – Ленца

Рассмотрим произвольный участок цепи, к концам которого приложено напряжение  $U$ . За время  $dt$  через каждое сечение проводника проходит заряд

$$dq = Idt.$$

При этом работа силы электрического поля на данном участке

$$dA = Udq = UI dt.$$

Разделив работу на время, получим выражение для мощности –

$$N = \frac{dA}{dt} = UI. \quad (1.7.16)$$

Полезно вспомнить и другие формулы для мощности и работы:

$$N = RI^2; \quad (1.7.17)$$

$$A = RI^2 t. \quad (1.7.18)$$

В 1841 г. манчестерский пивовар Джеймс Джоуль и в 1843 г. петербургский академик Эмилий Ленц установили закон теплового действия электрического тока.

Независимо друг от друга Джоуль и Ленц показали, что **при протекании тока в проводнике выделяется количество теплоты**

$$Q = RI^2 t. \quad (1.7.19)$$

Если ток изменяется со временем, то

$$Q = \int_1^2 RI^2 dt.$$

Это **закон Джоуля – Ленца в интегральной форме**.

Отсюда видно, что *нагревание происходит за счет работы, совершаемой силами поля над зарядом*.

Соотношение (1.7.19) имеет интегральный характер и относится ко всему проводнику с сопротивлением  $R$ , по которому течет ток  $I$ . Получим закон Джоуля – Ленца в локально-дифференциальной форме, характеризуя тепловыделение в произвольной точке.

**Тепловая мощность тока** в элементе проводника  $\Delta l$  сечением  $\Delta S$ , объемом  $\Delta V = \Delta l \cdot \Delta S$  равна

$$\Delta N = I^2 R = I \Delta \varphi = j \Delta S E \Delta l = \vec{j} \vec{E} \Delta V.$$

Удельная мощность тока

$$w = \frac{\Delta N}{\Delta V} = \vec{j} \vec{E}.$$

Согласно закону Ома в дифференциальной форме  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ . Отсюда **закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме, характеризующий плотность выделенной энергии**, –

$$w = \sigma \vec{E}^2. \quad (1.7.20)$$

Так как выделенная теплота равна работе сил электрического поля –

$$A = IU t,$$

то мы можем записать для мощности тока:

$$N = UI = RI^2. \quad (1.7.21)$$

**Мощность, выделенная в единице объема проводника,  $w = \rho j^2$ .**

Приведенные формулы справедливы для однородного участка цепи и для неоднородного.

**Определим КПД источника тока –  $\eta$ .** Рассмотрим элементарную электрическую цепь, содержащую источник ЭДС с внутренним сопротивлением  $r$ , и внешним сопротивлением  $R$  (рис. 1.7.4).

КПД определяем как отношение полезной работы к затраченной:

$$\eta = \frac{A_{\text{п}}}{A_{\text{з}}} = \frac{N_{\text{п}}}{N_{\text{з}}} = \frac{UI}{\varepsilon I} = \frac{U}{\varepsilon}.$$

**Полезная работа** – мощность, выделяемая на внешнем сопротивлении  $R$  в единицу времени.

По закону Ома имеем:  $U = IR$ , а  $\varepsilon = (R + r)I$ , тогда КПД

$$\eta = \frac{U}{\varepsilon} = \frac{IR}{I(R + r)} = \frac{R}{R + r}.$$

На рисунком 7.7.

Как видно из рисунка максимальный КПД получается в данной цепи при уменьшении мощности.

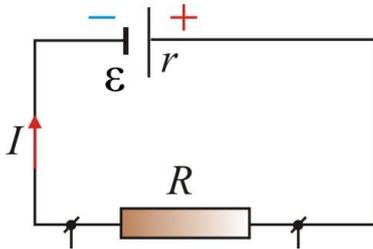


Рис. 1.7.4

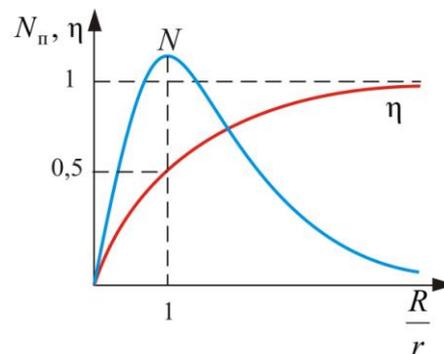


Рис. 1.7.5

### Правила Кирхгофа для разветвленных цепей

Расчет разветвленных цепей с помощью закона Ома довольно сложен. Эта задача решается более просто с помощью двух правил немецкого физика Г. Кирхгофа (1824 – 1887).

**Первое правило Кирхгофа** утверждает, что алгебраическая сумма токов, сходящихся в любом узле цепи равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0.$$

В случае установившегося постоянного тока в цепи ни в одной точке проводника, ни на одном из его участков не должны накапливаться

электрические заряды *узел* – любой участок цепи, где сходятся более двух проводников (рис. 1.7.6).

Токи, сходящиеся к узлу, считаются положительными:

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0.$$

Первый закон является следствием закона сохранения заряда.

**Второе правило Кирхгофа** является обобщением закона Ома для разветвленной цепи и следствием ЗСЭ.

Для произвольного замкнутого контура с произвольным числом разветвлений (рис. 1.7.7) можно записать для каждого элемента контура:

$$\varphi_2 - \varphi_3 + E_1 = I_1 R_1;$$

$$\varphi_3 - \varphi_1 + E_2 = I_2 R_2;$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 + E_3 = I_3 R_3.$$

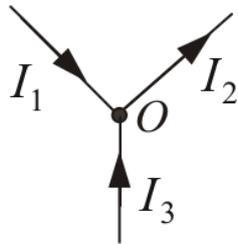


Рис. 1.7.6

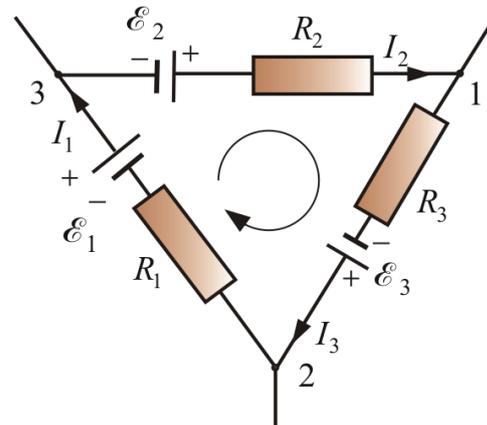


Рис. 1.7.7

Складывая эти уравнения получим **второе правило Кирхгофа**:

$$\sum_k I_k R_k = \sum_k E_k.$$

**В любом замкнутом контуре электрической цепи алгебраическая сумма произведения тока на сопротивление равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом же контуре.**

Обход контуров осуществляется по часовой стрелке, если направление обхода совпадает с направлением тока, то ток берется со знаком «плюс».

### Контрольные вопросы. Упражнения

1. Что называют силой тока? плотностью тока? Каковы их единицы? Назовите условия возникновения и существования электрического тока.
2. Что такое сторонние силы? Какова их природа?
3. В чем заключается физический смысл электродвижущей силы, действующей в цепи? напряжения? разности потенциалов?
4. Почему напряжение является обобщенным понятием разности потенциалов?
5. Какова связь между сопротивлением и проводимостью, удельным сопротивлением и удельной проводимостью?
6. На чем основано действие термометров сопротивления?
7. Выведите законы Ома и Джоуля – Ленца. В чем заключается физический смысл удельной тепловой мощности тока?
8. Проанализируйте обобщенный закон Ома. Какие частные законы можно из него получить?
9. Поясните физический смысл электродвижущей силы, разности потенциалов и напряжения на участке электрической цепи.
10. Как формулируются правила Кирхгофа? На чем они основаны?
11. Как составляются уравнения, выражающие правила Кирхгофа?
12. Определите сопротивление нихромовой проволоки длиной 1 м и массой 0,83 г. Удельное сопротивление нихрома  $10^{-6}$  Ом•м, плотность  $8300 \text{ кг/м}^3$
13. Проволоку длиной 1 м растянули так, что ее длина стала 110 см. На сколько процентов увеличилось при этом ее сопротивление.
14. . Сколько витков проволоки следует вплотную намотать на фарфоровую трубку радиусом 10 см, чтобы изготовить реостат сопротивлением 50 Ом? Удельное сопротивление проволоки  $5 \times 10^{-6}$  Ом•м, ее диаметр 2 мм.
15. Амперметр имеет внутреннее сопротивление 0,02 Ом, его шкала рассчитана на силу тока 1,2 В. Определите сопротивление (в мОм) шунта, который надо присоединить к амперметру параллельно, чтобы им можно было измерять силу тока до 6 А.
16. За одну минуту через поперечное сечение проводника прошел заряд 100 Кл. При этом первые 10 с сила тока равномерно возрастала от нуля до некоторой величины  $I$ , а последние 10 с равномерно уменьшалась до нуля. Найдите  $I$ .

## 1.8. Электрический ток в металлах, полупроводниках и в электролитах

### 1.8.1. Электрический ток в металлах

*Электрический ток в металлах – это упорядоченное движение электронов под действием электрического поля.*

Наиболее убедительное доказательство электронной природы тока в металлах было получено в опытах с инерцией электронов (опыт Толмена и Стьюарта).

Катушка с большим числом витков тонкой проволоки (рис. 1.8.1) приводилась в быстрое вращение вокруг своей оси. Концы катушки с помощью гибких проводов были присоединены к чувствительному баллистическому гальванометру. Раскрученная катушка резко тормозилась, и в цепи возникал кратковременный ток, обусловленный инерцией носителей заряда. Полный заряд, протекающий по цепи, измерялся гальванометром.

При торможении вращающейся катушки на каждый носитель заряда  $e$  массой  $m$  действует *тормозящая сила*, которая играет роль *сторонней силы*, т.е. *силы неэлектрического происхождения*:

$$F = -m \frac{dv}{dt}.$$

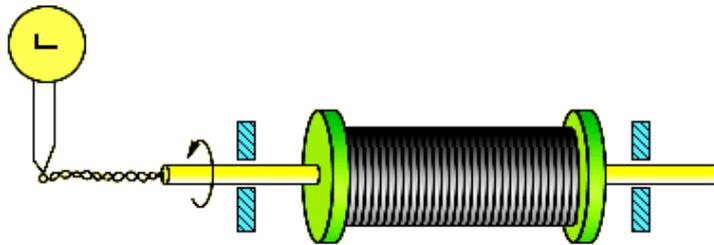


Рис. 1.8.1

Сторонняя сила, отнесенная к единице заряда, по определению является напряженностью  $E_{ст}$  поля сторонних сил:

$$E_{ст} = -\frac{m}{e} \frac{dv}{dt}.$$

Следовательно, в цепи при торможении катушки возникает *электродвижущая сила*

$$\varepsilon = E_{ст} l = -\frac{m}{e} \frac{dv}{dt} l.$$

За время торможения катушки по *цепи протечет заряд  $q$* , равный

$$q = \int Idt = \frac{1}{R} \int \mathcal{E} dt = \frac{m l v_0}{e R},$$

где  $l$  – длина проволоки катушки;  $I$  – мгновенное значение силы тока в катушке;  $R$  – полное сопротивление цепи;  $v_0$  – начальная линейная скорость проволоки.

*Хорошая электропроводность металлов объясняется высокой концентрацией свободных электронов, равной по порядку величины числу атомов в единице объема.*

Предположение о том, что за электрический ток в металлах ответственные электроны, возникло значительно раньше опытов Толмена и Стюарта. Еще в 1900 г. немецкий ученый П. Друде на основе гипотезы о существовании свободных электронов в металлах создал электронную теорию проводимости металлов. Эта теория получила развитие в работах голландского физика Х. Лоренца и носит название *классической электронной теории*. Согласно этой теории электроны в металлах ведут себя, как электронный газ, во многом похожий на идеальный газ.

Электронный газ заполняет пространство между ионами, образующими кристаллическую решетку металла. Из-за взаимодействия с ионами электроны могут покинуть металл, лишь преодолев так называемый *потенциальный барьер*. Высота этого барьера называется *работой выхода*.

При обычных (комнатных) температурах у электронов не хватает энергии для преодоления потенциального барьера. Согласно теории Друде – Лоренца электроны обладают такой же средней энергией теплового движения, как и молекулы одноатомного идеального газа. Это позволяет оценить среднюю скорость теплового движения электронов по формулам молекулярно-кинетической теории:  $v_{\text{теп}} = 10^5$  м/с.

При наложении внешнего электрического поля в металлическом проводнике, кроме теплового движения электронов, возникает их упорядоченное движение (дрейф), т.е. электрический ток. *Величина дрейфовой скорости электронов* лежит в пределах 0,6–6 мм/с. Таким образом, средняя скорость упорядоченного движения электронов в металлических проводниках на много порядков меньше средней скорости их теплового движения.

Малая скорость дрейфа не противоречит опытному факту, что ток во всей цепи постоянного тока устанавливается практически мгновенно. Замыкание цепи вызывает распространение электрического поля со скоростью  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. Через время  $\tau = l/c$  ( $l$  – длина цепи) вдоль цепи устанавливается стационарное распределение электрического поля, и в ней начинается упорядоченное движение электронов.

В классической электронной теории металлов предполагается, что движение электронов подчиняется законам механики Ньютона. В этой теории пренебрегают взаимодействием электронов между собой, а их взаимодействие с положительными ионами сводят только к соударениям. Предполагается также, что при каждом соударении электрон передает решетке всю накопленную в электрическом поле энергию, и поэтому после соударения он начинает движение с нулевой дрейфовой скоростью.

Несмотря на то, что все эти допущения являются весьма приближенными, классическая электронная теория качественно объясняет законы электрического тока в металлических проводниках – закон Ома, закон Джоуля – Ленца – и объясняет существование электрического сопротивления металлов.

Закон Ома:

$$I = enS\bar{v}_d = \frac{1}{2} \frac{e^2 \tau n S}{m} E = \frac{e^2 \tau n S}{2ml} U.$$

Электрическое сопротивление проводника:

$$R = \frac{2m}{e^2 n \tau} \frac{l}{S}.$$

Закон Джоуля – Ленца:

$$\Delta Q = \frac{nSl\Delta t}{\tau} \frac{e^2 \tau^2}{2m} E^2 = \frac{ne^2 \tau S}{2m} U^2 \Delta t = \frac{U^2}{R} \Delta t.$$

Однако в ряде вопросов классическая электронная теория приводит к выводам, находящимся в противоречии с опытом. Эта теория не может, например, объяснить, почему молярная теплоемкость металлов, также как и молярная теплоемкость диэлектрических кристаллов, равна  $3R$  (закон Дюлонга и Пти). Классическая электронная теория не может также объяснить температурную зависимость удельного сопротивления металлов: теория дает  $\rho \sim \sqrt{T}$ , в то время как из эксперимента получается зависимость  $\rho \sim T$ .

Наиболее ярким примером расхождения теории и опытов является *сверхпроводимость*.

### Зонная модель электронной проводимости металлов

Качественное различие между металлами и полупроводниками (диэлектриками) состоит в характере зависимости удельной проводимости от температуры. У металлов с ростом температуры проводимость падает, а у полупроводников и диэлектриков – растет. При  $T \rightarrow 0$  К у чистых металлов проводимость  $\sigma \rightarrow \infty$ . У полупроводников и диэлектриков при

$T \rightarrow 0 \text{ К}$   $\sigma \rightarrow 0$ . Качественного различия между полупроводниками и диэлектриками в отношении электропроводности нет.

Проявление у одних веществ металлических свойств, а у других полупроводниковых и диэлектрических может быть последовательно объяснено только в рамках *квантовой теории*.

Согласно квантовым представлениям энергия электронов в атоме может изменяться дискретным образом. Причем, согласно принципу Паули, в одном квантовом состоянии может находиться не более одного электрона. В результате электроны не собираются на каком-то одном энергетическом уровне, а последовательно заполняют разрешенные энергетические уровни в атоме, формируя его электронные оболочки.

При сближении большого числа атомов и образовании кристаллической структуры химические связи между атомами образуются за счет электронов, находящихся во внешних, валентных, электронных оболочках.

Согласно принципу Паули атомы не могут сбиться в плотную массу, поскольку в этом случае в одном квантовом состоянии оказалось бы много частиц с *полуцелым спином* – *собственным моментом количества движения* ( $L = \hbar/2$ ). Такие частицы называются *фермионами*, и к ним, в частности, относятся электроны, протоны, нейтроны. Названы они так в честь итальянского физика Э. Ферми, впервые описавшего особенности поведения коллективов таких частиц. При сближении большого числа атомов в пределах твердого тела происходит расщепление исходного энергетического уровня валентного электрона в атоме на  $N$  подуровней, где  $N$  – число атомов, образующих кристалл. В результате образуется зона разрешенных энергетических уровней для электронов в твердом теле (рис. 1.8.2).

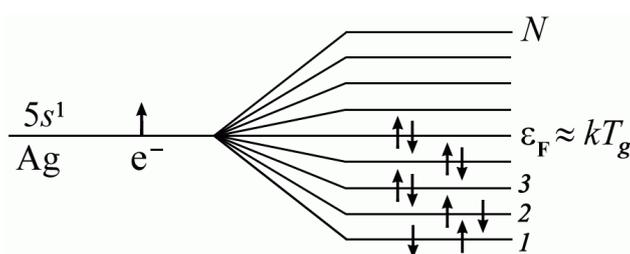


Рис. 1.8.2

В металлах внешние валентные оболочки заполнены не полностью, например, у атомов серебра во внешней оболочке  $5s^1$  находится один электрон, в то время как, согласно принципу Паули, могло бы находиться два электрона с различными ориентациями спинов, но второго электрона во внешней оболочке атома серебра просто нет. При сближе-

нии  $N$  атомов Ag и расщеплении внешнего энергетического уровня  $5s_1$  на  $N$  подуровней каждый из них заполняется уже двумя электронами с различными ориентациями спинов. В результате при сближении  $N$  атомов серебра возникает энергетическая зона, наполовину заполненная электронами. Энергия, соответствующая последнему заполненному электронному уровню при 0 К, называется энергией Ферми ( $\varepsilon_F \approx kT_g$ ). Расстояние  $\Delta E$  между соседними энергетическими уровнями очень мало, поскольку  $N$  очень велико, до  $10^{23} \text{ см}^{-3}$ ;

$$\varepsilon_F \sim 1 \div 10 \text{ эВ},$$

$$\Delta E = \varepsilon_F/N \ll kT \approx 0,025 \text{ эВ}.$$

Расстояние между соседними разрешенными уровнями электронов в металлах много меньше энергии теплового движения электронов даже при самых низких температурах. Если поместить проводник в электрическое поле, включив его, например, в замкнутую цепь с источником ЭДС, то электроны начнут перемещаться из точки проводника с меньшим потенциалом к точке с большим потенциалом, т.к. их заряд отрицателен. Но движение в электрическом поле означает увеличение энергии электрона, а по квантовым представлениям переход на более высокий энергетический уровень у электрона возможен, если этот соседний уровень свободен. В металлах таких свободных уровней для электронов, находящихся вблизи уровня Ферми, вполне достаточно, поэтому металлы являются хорошими проводниками электрического тока.

### 1.8.2. Электрический ток в полупроводниках

К числу полупроводников относятся многие химические элементы (германий, кремний, селен, теллур, мышьяк и др.), огромное количество сплавов и химических соединений. Почти все неорганические вещества окружающего нас мира – полупроводники. Самым распространенным в природе полупроводником является кремний, составляющий около 30 % земной коры.

Качественное отличие полупроводников от металлов проявляется в зависимости удельного сопротивления от температуры (рис. 1.8.3 а, б).

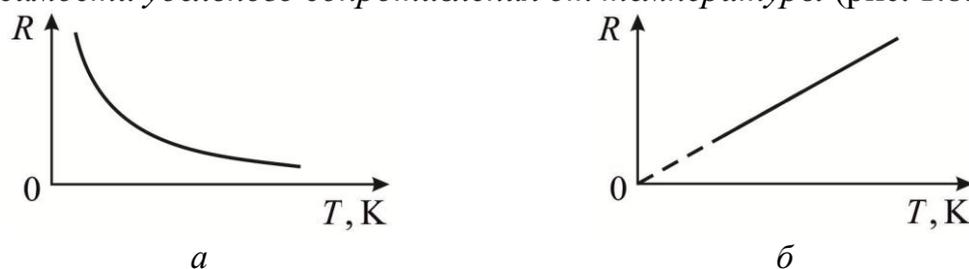


Рис. 1.8.3

### Зонная модель электронно-дырочной проводимости полупроводников

При образовании твердых тел возможна ситуация, когда энергетическая зона, возникшая из энергетических уровней *валентных электронов* исходных атомов, оказывается полностью заполненной электронами, а ближайшие доступные для заполнения электронами энергетические уровни отделены от *валентной зоны*  $E_V$  промежутком неразрешенных энергетических состояний – так называемой *запрещенной зоной*  $E_g$  (рис. 1.8.4). Выше запрещенной зоны расположена зона разрешенных для электронов энергетических состояний – *зона проводимости*  $E_C$ .

Зона проводимости при 0 К полностью свободна, а валентная зона – полностью занята. Подобные зонные структуры характерны для кремния, германия, арсенида галлия (GaAs), фосфида индия (InP) и многих других твердых тел, являющихся полупроводниками.

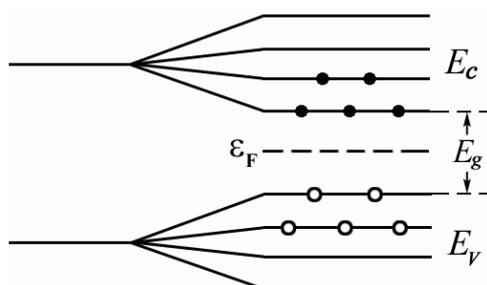


Рис. 1.8.4

При повышении температуры полупроводников и диэлектриков электроны способны получать дополнительную энергию, связанную с тепловым движением  $kT$ . У части электронов энергии теплового движения оказывается достаточно для перехода из *валентной зоны* в *зону проводимости*, где электроны под действием внешнего электрического поля могут перемещаться практически свободно.

В этом случае *в цепи с полупроводниковым материалом по мере повышения температуры полупроводника будет нарастать электрический ток*. Этот ток связан не только с движением электронов в зоне проводимости, но и с появлением *вакантных мест от ушедших в зону проводимости электронов* в валентной зоне, так называемых **дырок**. Вакантное место может быть занято валентным электроном из соседней пары, тогда дырка переместится на новое место в кристалле.

Если полупроводник помещается в электрическое поле, то *в упорядоченное движение вовлекаются не только свободные электроны, но*

и дырки, которые ведут себя, как положительно заряженные частицы. Поэтому ток  $I$  в полупроводнике складывается из электронного  $I_n$  и дырочного  $I_p$  токов:  $I = I_n + I_p$ .

Электронно-дырочный механизм проводимости проявляется только у чистых (т.е. без примесей) полупроводников. Он называется **собственной электрической проводимостью** полупроводников. Электроны забрасываются в зону проводимости с уровня Ферми, который оказывается в собственном полупроводнике расположенным посередине запрещенной зоны (рис. 1.8.4).

Существенно изменить проводимость полупроводников можно, введя в них очень небольшие количества примесей. В металлах примесь всегда уменьшает проводимость. Так, добавление в чистый кремний 3 % атомов фосфора увеличивает электропроводность кристалла в  $10^5$  раз.

Небольшое добавление примеси к полупроводнику **называется легированием**.

Необходимым условием резкого уменьшения удельного сопротивления полупроводника при введении примесей является отличие валентности атомов примеси от валентности основных атомов кристалла. Проводимость полупроводников при наличии примесей называется **примесной проводимостью**.

Различают два типа примесной проводимости – **электронную** и **дырочную** проводимости. **Электронная проводимость** возникает, когда в кристалл германия с четырехвалентными атомами введены пятивалентные атомы (например, атомы мышьяка As), рис. 1.8.5.

Четыре валентных электрона атома мышьяка включены в образование ковалентных связей с четырьмя соседними атомами германия. Пятый валентный электрон оказался излишним. Он легко отрывается от атома мышьяка и становится свободным. Атом, потерявший электрон, превращается в положительный ион, расположенный в узле кристаллической решетки.

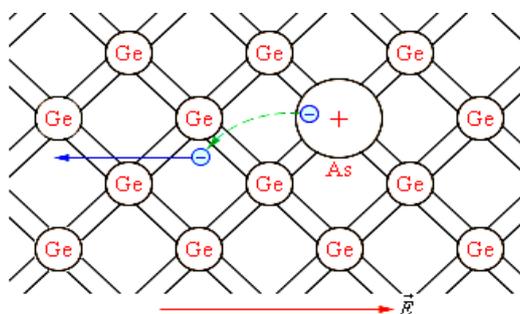


Рис. 1.8.5

*Примесь из атомов с валентностью, превышающей валентность основных атомов полупроводникового кристалла, называется **донорской примесью***. В результате ее введения в кристалле появляется значительное число свободных электронов. Это приводит к резкому уменьшению удельного сопротивления полупроводника – в тысячи и даже миллионы раз.

Удельное сопротивление полупроводника с большим содержанием примесей может приближаться к удельному сопротивлению металлического проводника. Такая проводимость, обусловленная свободными электронами, называется *электронной*, а полупроводник, обладающий электронной проводимостью, называется *полупроводником n-типа*.

*Дырочная проводимость* возникает, когда в кристалл германия введены трехвалентные атомы, например атомы индия (рис. 1.8.6).

На рис. 1.8.6 показан атом индия, который создал с помощью своих валентных электронов ковалентные связи лишь с тремя соседними атомами германия. На образование связи с четвертым атомом германия у атома индия нет электрона. Этот недостающий электрон может быть захвачен атомом индия из ковалентной связи соседних атомов германия. В этом случае атом индия превращается в отрицательный ион, расположенный в узле кристаллической решетки, а в ковалентной связи соседних атомов образуется вакансия.

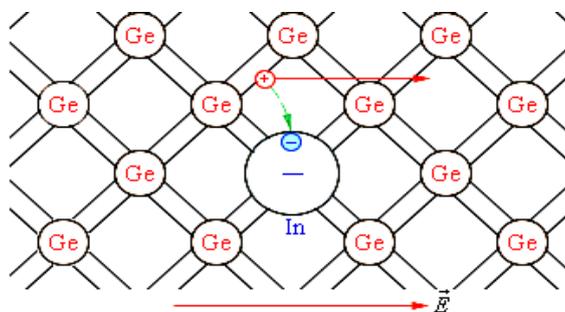


Рис. 1.8.6

*Примесь атомов, способных захватывать электроны, называется **акцепторной примесью***. В результате введения акцепторной примеси в кристалле разрывается множество ковалентных связей и образуются вакантные места (дырки). На эти места могут перескакивать электроны из соседних ковалентных связей, что приводит к хаотическому блужданию дырок по кристаллу.

Концентрация дырок в полупроводнике с акцепторной примесью значительно превышает концентрацию электронов, которые возникли из-за механизма собственной электропроводности полупроводника:

$n_p \gg n_n$ . Проводимость такого типа называется **дырочной проводимостью**. Примесный полупроводник с дырочной проводимостью называется **полупроводником *p*-типа**. Основными носителями свободного заряда в полупроводниках *p*-типа являются дырки.

### Электронно-дырочный переход. Диоды и транзисторы

В современной электронной технике полупроводниковые приборы играют исключительную роль. За последние три десятилетия они почти полностью вытеснили электровакуумные приборы.

В любом полупроводниковом приборе имеется один или несколько электронно-дырочных переходов. **Электронно-дырочный переход** (или *n-p*-переход) – это область контакта двух полупроводников с разными типами проводимости.

На границе полупроводников (рис. 1.8.7) образуется двойной электрический слой, электрическое поле которого препятствует процессу диффузии электронов и дырок навстречу друг другу.

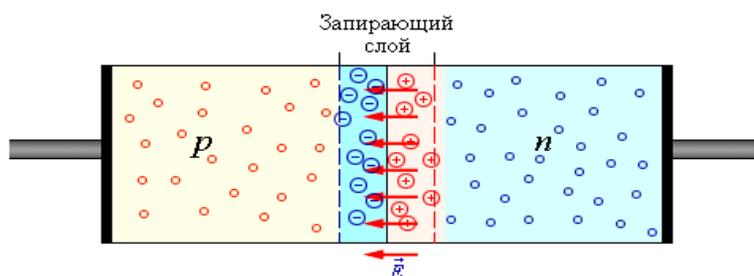


Рис. 1.8.7

Способность *n-p*-перехода пропускать ток практически только в одном направлении используется в приборах, которые называются **полупроводниковыми диодами**. Полупроводниковые диоды изготавливаются из кристаллов кремния или германия. При их изготовлении в кристалл с каким-либо типом проводимости вплавляют примесь, обеспечивающую другой тип проводимости.

На рис. 1.8.8 приведена типичная вольт-амперная характеристика кремниевого диода.

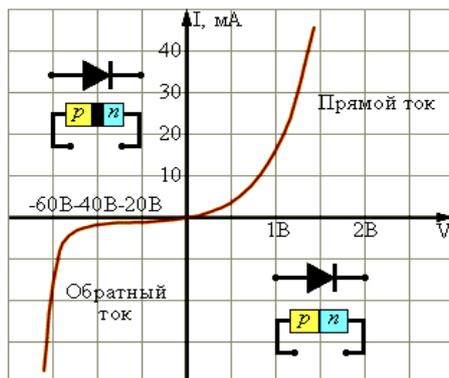


Рис. 1.8.8

Как следует из вольт-амперной характеристики, обратный ток до определенного значения напряжения (пробойного) равен нулю. При напряжении выше пробойного наступает пробой диода, он выходит из строя.

### 1.8.3. Сверхпроводимость

Существует одно явление, механизм которого оказалось возможным объяснить лишь в рамках квантовой теории. При некоторой определенной температуре  $T_{кр}$ , различной для разных веществ, удельное сопротивление скачком уменьшается до нуля (рис. 1.8.9, кривая 2).

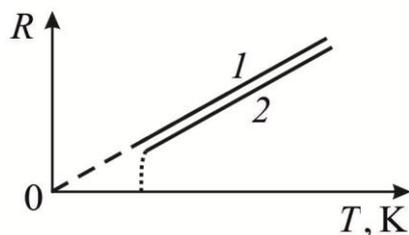


Рис. 1.8.9

В 1908 г. голландскому физика Г. Камерлинг–Оннесу удалось получить жидкий гелий с температурой кипения 4,44 К. Метод получения жидкого гелия оказался очень сложным и малоэффективным, и в течение долгого времени лишь лаборатория Камерлинг–Оннеса в Лейдене производила жидкий гелий.

Изучая поведение сопротивления ртути, охлаждаемой до гелиевых температур, Камерлинг–Оннес в 1911 г. впервые в мире наблюдал *исчезновение сопротивления ртути практически до нуля*. Это явление было названо **сверхпроводимостью**.

Камерлинг–Оннес писал: «При 4,2 К сопротивление ртути уменьшается до 0,084 Ом, что составляет 0,0021 от значения сопротивления, которое имела бы твердая ртуть при 0 °С (39,7 Ом). Обнаружено, что при 3 К сопротивление падает ниже  $3 \cdot 10^{-6}$  Ом, что составляет  $10^{-7}$  от значения при 0 °С». Отметим, что температурный интервал, в котором сопротивление уменьшалось до нуля, очень узок, и для некоторых металлов он составляет лишь  $10^{-3}$  К.

В 1957 г. Дж. Бардином, Л. Купером, Дж. Шриффером дано квантово-механическое объяснение природы сверхпроводимости (**теория БКШ**). Было показано, что хотя между электронами действуют силы кулоновского отталкивания, тем не менее в твердых телах при температуре перехода в сверхпроводящее состояние  $T_c$  – критической температуре, между электронами начинают действовать силы притяжения, обусловленные обменом **фононами** между электронами (**фононы** – кванты упругих колебаний кристаллической решетки). Это притяжение приводит к образованию связанных электронных пар – **куперовских пар**.

Пары электронов уже не являются **фермионами**, и для них уже не действует принцип запрета Паули. Спаренные электроны являются **бозонами** – частицами с нулевым спином, и стремятся сконденсироваться. В результате такой конденсации образуется электрически заряженная, сверхтекучая электронная жидкость, обладающая свойствами сверхпроводимости.

Сверхпроводящее состояние является макроскопическим квантовым состоянием металла. Электрон, движущийся среди положительно заряженных ионов, поляризует решетку, т.е. электростатическими силами притягивает к себе ближайшие ионы. Благодаря такому смещению ионов в окрестности траектории электрона локально возрастает плотность положительного заряда. Второй электрон, движущийся вслед за первым, будет притягиваться областью с избыточным положительным зарядом. В результате косвенным образом за счет взаимодействия с решеткой между электронами 1 и 2 возникают силы притяжения (связанная куперовская пара).

Вещества в сверхпроводящем состоянии обладают исключительными свойствами. Практически наиболее важным из них является способность длительное время (многие годы) поддерживать без затухания электрический ток, возбужденный в сверхпроводящей цепи.

Научный интерес к сверхпроводимости возрастал по мере открытия новых материалов с более высокими критическими температурами. Значительный шаг в этом направлении произошел в 1986 году, когда было обнаружено, что у одного сложного керамического соединения  $T_{кр} = 35$  К. Уже в следующем 1987 году физики сумели создать новую

керамику с критической температурой 98 К, превышающей температуру жидкого азота (77 К).

Явление перехода веществ в сверхпроводящее состояние при температурах, превышающих температуру кипения жидкого азота, было названо *высокотемпературной сверхпроводимостью*. В 1988 году было создано керамическое соединение на основе элементов  $Tl-Ca-Ba-Cu-O$  с критической температурой 125 К.

Следует отметить, что до настоящего времени механизм высокотемпературной сверхпроводимости керамических материалов до конца не выяснен.

### 1.8.4. Эмиссия электронов из проводников

Уже отмечалось, при переходе границы раздела между проводником и вакуумом скачком изменяются напряженность и индукция электрического поля. С этим связаны специфические явления. Электрон свободен только в границах металла. Как только он пытается перейти границу «металл – вакуум», возникает кулоновская сила притяжения между электроном и образовавшимся на поверхности избыточным положительным зарядом (рис. 1.8.9).

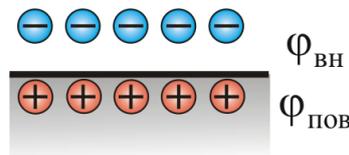


Рис. 1.8.9

Вблизи от поверхности образуется электронное облако, и на границе раздела формируется двойной электрический слой с разностью потенциалов  $(\Phi_{вн} - \Phi_{пов})$ . Скачки потенциала на границе металла показаны на рис. 1.8.10.

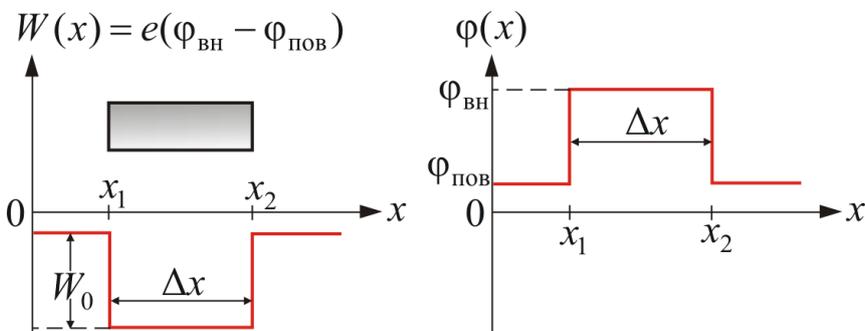


Рис. 1.8.10

В занятом металлом объеме образуется потенциальная энергетическая яма, т.к. в пределах металла электроны свободны и их энергия взаимодействия с узлами решетки равна нулю. За пределами металла электрон приобретает энергию  $W_0$ . Это энергия притяжения,  $W_0 < 0$ . Для того чтобы покинуть металл, электрон должен преодолеть потенциальный барьер и совершить работу

$$A_{\text{ВЫХ}} = e(\varphi_{\text{ВН}} - \varphi_{\text{ПОВ}}). \quad (1.8.1)$$

Эту работу называют **работой выхода электрона из металла**. Для ее совершения электрону необходимо сообщить достаточную энергию –  $W \geq A_{\text{ВЫХ}}$ .

### Термоэлектронная эмиссия

Величина работы выхода зависит от химической природы вещества, от его термодинамического состояния и от состояния поверхности раздела. Если энергия, достаточная для совершения работы выхода, сообщается электронам путем нагревания, то *процесс выхода электронов из металла называют термоэлектронной эмиссией*.

В классической термодинамике металл представляют в виде ионной решетки, заключающей в себе электронный газ. Считают, что сообщество свободных электронов подчиняется законам идеального газа. Следовательно, в соответствии с распределением Максвелла, при температуре, отличной от 0 К, в металле есть какое-то количество электронов, тепловая энергия которых больше работы выхода. Эти электроны и покидают металл. Если температуру увеличить, то увеличивается и число таких электронов.

*Явление испускания электронов нагретыми телами (эмиттерами) в вакуум или другую среду называется термоэлектронной эмиссией*. Нагрев необходим для того, чтобы энергии теплового движения электрона было достаточно для преодоления сил кулоновского притяжения между отрицательно заряженным электроном и индуцируемым им на поверхности металла положительным зарядом при удалении с поверхности (рис. 1.8.10). Кроме того, при достаточно высокой температуре над поверхностью металла создается отрицательно заряженное электронное облако, препятствующее выходу электрона с поверхности металла в вакуум. Этими двумя и, возможно, другими причинами определяется величина работы выхода электрона из металла.

Явление термоэлектронной эмиссии открыто в 1883 г. Эдисоном, знаменитым американским изобретателем. Это явление наблюдалось им в вакуумной лампе с двумя электродами – анодом, имеющим положительный потенциал, и катодом с отрицательным потенциалом. Катодом

лампы может служить нить из тугоплавкого металла (вольфрам, молибден, тантал и др.), нагреваемая электрическим током (рис. 1.8.11). Такая лампа называется вакуумным диодом. Если катод холодный, то ток в цепи *катод – анод* практически отсутствует. При повышении температуры катода в цепи *катод – анод* появляется электрический ток, который тем больше, чем выше температура катода. При постоянной температуре катода ток в цепи *катод – анод* возрастает с повышением разности потенциалов  $U$  между катодом и анодом и выходит к некоторому стационарному значению, называемому **током насыщения**  $I_{н}$ . При этом *все термоэлектроны, испускаемые катодом, достигают анода*. Величина тока анода не пропорциональна  $U$ , и поэтому для вакуумного диода закон Ома не выполняется.

На рис. 1.8.11 показаны схема вакуумного диода и вольт-амперные характеристики (ВАХ)  $I_a(U_a)$ . Здесь  $U_3$  – задерживающее напряжение, при котором  $I = 0$ .

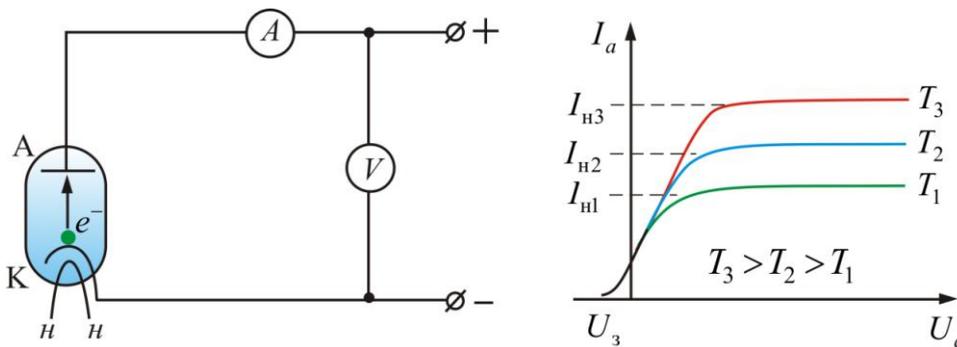


Рис. 1.8.11

### Холодная и взрывная эмиссия

Электронную эмиссию, вызываемую действием сил электрического поля на свободные электроны в металле, называют **холодной эмиссией, или автоэлектронной (АЭЭ)**. Для этого должна быть достаточной напряженность поля и должно выполняться условие

$$A_{\text{вых}} = e(\varphi_{\text{вн}} - \varphi_{\text{пов}}) \leq eEd, \quad (1.8.2)$$

здесь  $d$  – толщина двойного электрического слоя на границе раздела сред. Обычно у чистых металлов  $d \approx 10^{-10}$  м и  $A_{\text{вых}} \approx 10^{-19}$  Дж = 1 эВ. При  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл получим  $E = 10^{10}$  В/м. На практике же холодная эмиссия наблюдается при значении напряженности порядка  $10^6 - 10^8$  В/м. Такое несоответствие относят на счет несостоятельности классических представлений для описания процессов на микроуровне.

Автоэлектронную эмиссию можно наблюдать в хорошо откачанной вакуумной трубке, катодом которой служит острие, а анодом – обычный электрод с плоской или мало изогнутой поверхностью. Напряженность электрического поля на поверхности острия с радиусом кривизны  $r$  и потенциалом  $U$  относительно анода равна

$$E = \frac{U}{r}.$$

При  $r \sim 10^{-2}$  мм и  $U \sim 10^3$  В  $E \sim 10^6$  В/см, что приведет к появлению слабого тока, обусловленного автоэлектронной эмиссией с поверхности катода. Сила эмиссионного тока быстро нарастает с повышением разности потенциалов  $U$ . При этом катод специально не разогревается, поэтому эмиссия и называется холодной.

С помощью автоэлектронной эмиссии принципиально возможно получение плотности тока  $10^6 - 10^8$  А/см<sup>2</sup>, но для этого нужны эмиттеры в виде совокупности большого числа микроострий, идентичных по форме, что практически невозможно, и, кроме того, увеличение тока до  $10^8$  А/см<sup>2</sup> приводит к взрывообразному разрушению микроострий и всего эмиттера.

Плотность тока АЭЭ в условиях влияния объемного заряда равна (закон Чайльда – Ленгмюра)

$$j = AE^{3/2} \leq 10^8 \text{ А/см}^2,$$

где  $A = \frac{4}{9} \varepsilon_0 \left( \frac{2e}{m} \right) E^{3/2} r^{-1/2}$  – коэффициент пропорциональности, определяемый геометрией и материалом катода.

Проще говоря, закон Чайльда – Ленгмюра показывает, что плотность тока пропорциональна  $E^{3/2}$  (закон трех вторых).

Током автоэлектронной эмиссии при концентрации энергии в микрообъемах катода до  $10^4$  Дж·м<sup>-1</sup> и более (при общей энергии  $10^{-8}$  Дж) может инициироваться качественно иной вид эмиссии, обусловленный **взрывом микроострий на катоде** (рис. 1.8.12).

При этом появляется ток электронов, который на порядки превосходит начальный ток – *наблюдается взрывная электронная эмиссия* (ВЭЭ). ВЭЭ была открыта и изучена в Томском политехническом институте в 1966 г. коллективом сотрудников под руководством Г.А. Месяца.

ВЭЭ – это единственный вид электронной эмиссии, позволяющий получить потоки электронов мощностью до  $10^{13}$  Вт с плотностью тока до  $10^9$  А/см<sup>2</sup>.

Ток ВЭЭ необычен по структуре. Он состоит из отдельных порций электронов  $10^{11} - 10^{12}$  штук, имеющих характер электронных лавин, по-

лучивших название *эктонов* (начальные буквы «*explosive centre*»), рис. 1.8.13. Время образования лавин составляет  $10^{-9}$ – $10^{-8}$  с.

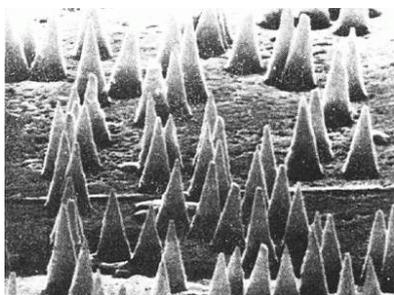


Рис. 1.8.12

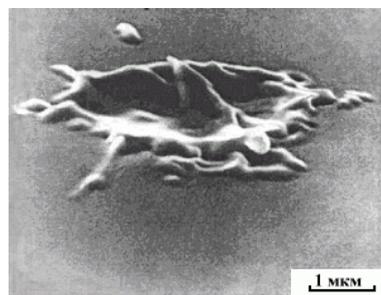


Рис. 1.8.13

Появление электронов в эктоне вызвано быстрым перегревом микроучастков катода и является, по существу, разновидностью термоэлектронной эмиссии. Существование эктона проявляется в образовании кратера на поверхности катода. Прекращение эмиссии электронов в эктоне обусловлено охлаждением зоны эмиссии за счет теплопроводности, уменьшения плотности тока, испарения атомов.

Взрывная эмиссия электронов и эктоны играют фундаментальную роль в вакуумных искрах и дугах, в разрядах низкого давления, в сжатых и высокопрочных газах, в микропромежутках, т.е. там, где в наличии есть электрическое поле высокой напряженности на поверхности катода.

Явление взрывной электронной эмиссии послужило основой для создания импульсных электрофизических установок, таких как высокопоточные ускорители электронов, мощные импульсные и рентгеновские устройства, мощные релятивистские сверхвысокочастотные генераторы. Например, импульсные ускорители электронов имеют мощность  $10^{13}$  Вт и более при длительности импульсов  $10^{-10}$ – $10^{-6}$  с, токе электронов  $10^6$  А и энергии электронов  $10^4$ – $10^7$  эВ. Такие пучки широко используются для исследований в физике плазмы, радиационной физике и химии, для накачки газовых лазеров и пр.

### Фотоэлектронная эмиссия

Фотоэлектронная эмиссия (фотоэффект) заключается в «выбивании» электронов из металла при действии на него электромагнитного излучения.

Схема установки для исследования фотоэффекта и ВАХ аналогичны показанным на рис. 1.8.11. Здесь вместо разогрева катода на него направляют поток фотонов или  $\gamma$ -квантов (рис. 1.8.14).

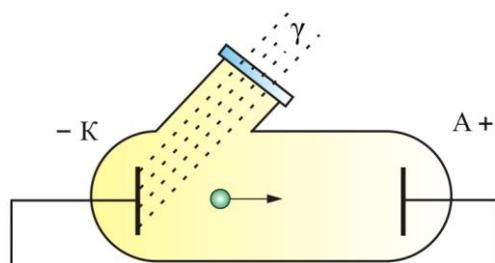


Рис. 1.8.14

Закономерности фотоэффекта еще в большей степени не согласуются с классической теорией, чем в случае холодной эмиссии. По этой причине мы рассмотрим теорию фотоэффекта при обсуждении квантовых представлений в оптике.

В физических приборах, регистрирующих  $\gamma$ -излучение, используют *фотоэлектронные умножители* ФЭУ. Схема прибора приведена на рис. 1.8.15.

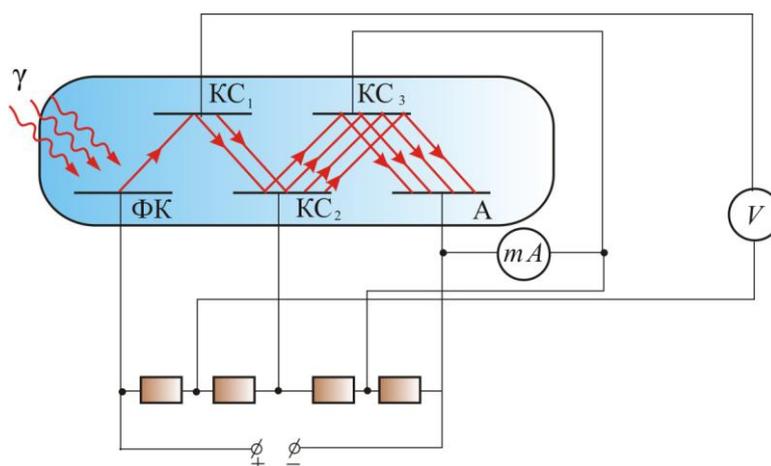


Рис. 1.8.15

В нем используют два эмиссионных эффекта: *фотоэффект* и *вторичную электронную эмиссию*, которая заключается в выбивании электронов из металла при бомбардировке последнего другими электронами. Электроны выбиваются светом из фотокатода ФК. Ускоряясь между ФК и первым эмиттером КС<sub>1</sub>, они приобретают энергию, достаточную, чтобы выбить большее число электронов из следующего эмиттера. Таким образом, умножение электронов происходит за счет увеличения их числа при последовательном прохождении разности потенциалов между соседними эмиттерами. Последний электрод называют коллектором. Регистрируют ток между последним эмиттером и коллектором. Таким об-

разом, ФЭУ служит усилителем тока, а последний пропорционален излучению, попадающему на фотокатод, что и используют для оценки радиоактивности.

### 1.8.5. Контактные явления на границе раздела двух проводников

Как показывает опыт, на контакте двух различных металлов образуется *двойной электрический слой* и соответствующая разность потенциалов (рис. 1.8.16).

Появление двойного электрического слоя обусловлено различием работ выхода электронов из металлов. Чем она больше, тем меньше вероятность перехода электронами границы раздела. Поэтому со стороны металла с большей работой выхода накапливается отрицательный заряд, а с противоположной – положительный.

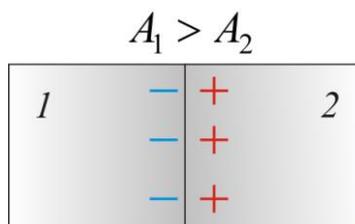


Рис. 1.8.16

Это явление наблюдалось итальянским физиком Александро Вольта (1745–1827), который сформулировал два экспериментальных закона, известных как законы Вольта:

1. *На контакте двух разных металлов возникает разность потенциалов, которая зависит от химической природы и от температуры спаяв.*

2. *Разность потенциалов на концах последовательно соединенных проводников не зависит от промежуточных проводников и равна разности потенциалов, возникающей при соединении крайних проводников при той же температуре.*

Результаты эксперимента можно объяснить с позиции классической электронной теории. Если принять, что потенциал за пределами металла равен нулю, то энергия электрона внутри металла с потенциалом  $\varphi_i$  определится выражением

$$W_i = e\varphi_i. \quad (1.8.3)$$

При соединении двух разных металлов (рис. 1.8.17) с работами выхода

$$A_1 = e\varphi_1 \quad \text{и} \quad A_2 = e\varphi_2$$

возникает избыточный переход электронов из второго металла в первый, т. к.  $A_2 < A_1$ . В результате концентрация электронов  $n_1$  в металле 1 увеличивается по сравнению с  $n_2$ , что порождает обратный избыточный поток электронного газа за счет диффузии, противоположный потоку, обусловленному разностью работ выхода.

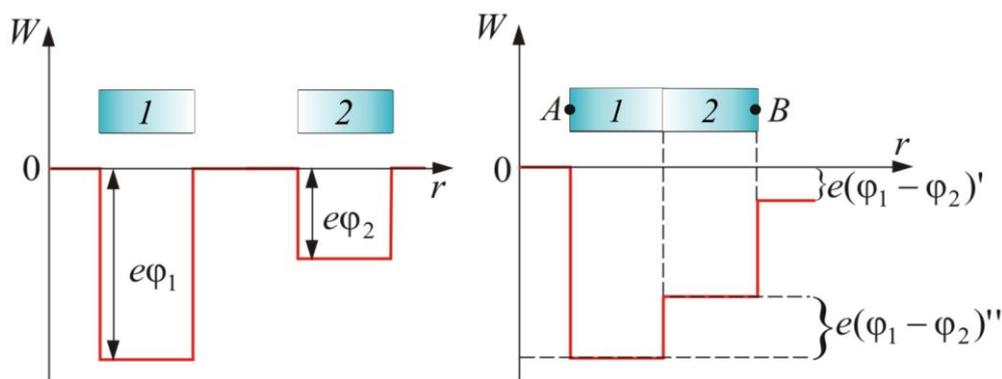


Рис. 1.8.17

Установившаяся разность потенциалов в равновесном состоянии определяется как

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = (\varphi_1 - \varphi_2)' + (\varphi_1 - \varphi_2)''$$

где  $(\varphi_1 - \varphi_2)'$  – разность потенциалов, обусловленная разными работами выхода электронов из металлов, а  $(\varphi_1 - \varphi_2)''$  – разность потенциалов, возникающая на границе раздела за счет неодинаковой концентрации электронов в электронном газе.

Установившуюся разность потенциалов можно найти из выражения

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{A_1 - A_2}{e} + \frac{kT}{e} \ln \frac{n_1}{n_2}$$

Явление возникновения контактной разности потенциалов и ее зависимость от температуры называют **термоэлектрическим эффектом**, или **эффектом Зеебека**. Эффект Зеебека (**прямой термоэлектрический эффект**) заключается в появлении разности потенциалов в термопарах.

Схема термопары, состоящей из спая двух разных металлов – 1 и 2, подогреваемых горелкой, показана на рис. 1.8.18.

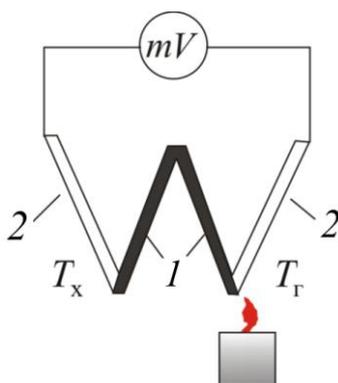


Рис. 1.8.18

На концах термопары возникает **термоЭДС**  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon = \frac{k}{e} \ln \frac{n_1}{n_2} (T_x - T_\Gamma) = \alpha(T_\Gamma - T_x), \quad (1.8.4)$$

где  $T_\Gamma$  – температура горячего спая и  $T_x$  – температура холодного спая.

Таким образом, термоЭДС термопары можно найти по формуле

$$\varepsilon = \alpha(T_\Gamma - T_x),$$

где  $\alpha = \frac{k}{e} \ln \frac{n_1}{n_2}$  – *постоянная термопары*.

Термопары применяют для измерения температуры. Батареи термопар используют как источники ЭДС для питания физических приборов.

**Эффектом Пельтье** называют **обратный термоэлектрический эффект**. Он заключается в том, что при пропускании тока через термопару её спай поглощает или выделяет тепло в зависимости от направления тока. Количество поглощенного тепла пропорционально плотности тока:

$$Q_{\text{П}} = \Pi_{12} j, \quad (1.8.5)$$

где  $\Pi_{12}$  – **коэффициент Пельтье**, зависящий от материала контактирующих металлов. Эффект используют при изготовлении холодильников. Этот термоэлектрический эффект проявляется более эффективно, если используются полупроводники.

### 1.8.6. Электрический ток в электролитах

**Электролитами** принято называть проводящие среды, в которых протекание электрического тока сопровождается переносом вещества. Носителями свободных зарядов в электролитах являются положительно и отрицательно заряженные ионы.

Основными представителями электролитов, широко используемыми в технике, являются водные растворы неорганических кислот, солей

и оснований. Прохождение электрического тока через электролит сопровождается выделением веществ на электродах. Это явление получило название *электролиза* (рис.9.10).

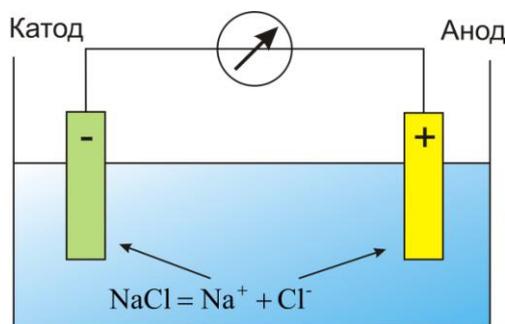


Рис.9.10

Электрический ток в электролитах представляет собой перемещение ионов обоих знаков в противоположных направлениях. Положительные ионы движутся к отрицательному электроду (*катоду*), отрицательные ионы – к положительному электроду (*аноду*). Ионы обоих знаков появляются в водных растворах солей, кислот и щелочей в результате расщепления части нейтральных молекул. Это явление называется *электролитической диссоциацией*.

Закон электролиза был экспериментально установлен английским физиком М. Фарадеем в 1833 году.

**Первый закон Фарадея** определяет количества первичных продуктов, выделяющихся на электродах при электролизе: *масса  $m$  вещества, выделившегося на электроде, прямо пропорциональна заряду  $q$ , прошедшему через электролит:*

$$m = kq = kIt,$$

где  $k$  – *электрохимический эквивалент вещества:*

$$k = \frac{1}{F} \frac{\mu}{n}$$

$F = eN_A = 96485$  Кл / моль. – *постоянная Фарадея.*

**Второй закон Фарадея** электрохимические эквиваленты различных веществ относятся их химические эквиваленты  $k_x$ :

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{k_{x2}}{k_{x1}}.$$

**Объединенный закон Фарадея** для электролиза:

$$m = \frac{1}{F} \frac{\mu}{n} It.$$

Электролитические процессы классифицируются следующим образом:

- получение неорганических веществ (водорода, кислорода, хлора, щелочей и т.д.);
- получение металлов (литий, натрий, калий, бериллий, магний, цинк, алюминий, медь и т.д.);
- очистка металлов (медь, серебро,...);
- получение металлических сплавов;
- получение гальванических покрытий;
- обработка поверхностей металлов (азотирование, борирование, электрополировка, очистка);
- получение органических веществ;
- электролиз и обессоливание воды;
- нанесение пленок при помощи электрофореза.

### Практическое применение электролиза

Электрохимические процессы широко применяются в различных областях современной техники, в аналитической химии, биохимии и т. д. В химической промышленности электролизом получают хлор и фтор, щелочи, хлораты и перхлораты, надсерную кислоту и персульфаты, химически чистые водород и кислород и т. д. При этом *одни вещества получают путем восстановления на катоде* (альдегиды, парааминофенол и др.), *другие электроокислением на аноде* (хлораты, перхлораты, перманганат калия и др.).

Электролиз в гидрометаллургии является одной из стадий переработки металлосодержащего сырья, обеспечивающей получение товарных металлов. Электролиз может осуществляться с растворимыми анодами – процесс электрорафинирования или с нерастворимыми – процесс электроэкстракции. Главной задачей при электрорафинировании металлов является обеспечения необходимой чистоты катодного металла при приемлемых энергетических расходах. В цветной металлургии электролиз используется для извлечения металлов из руд и их очистки.

Электролизом расплавленных сред получают алюминий, магний, титан, цирконий, уран, бериллий и др. Для рафинирования (очистки) металла электролизом из него отливают пластины и помещают их в качестве анодов 1 в электролизер 3 (рис.9.11). При пропускании тока металл, подлежащий очистке 1, подвергается анодному растворению, т. е. переходит в раствор в виде катионов. Затем эти катионы металла разряжаются на катоде 2, благодаря чему образуется компактный осадок уже чистого металла. Примеси, находящиеся в аноде, либо остаются нерастворимыми 4, либо переходят в электролит и удаляются.

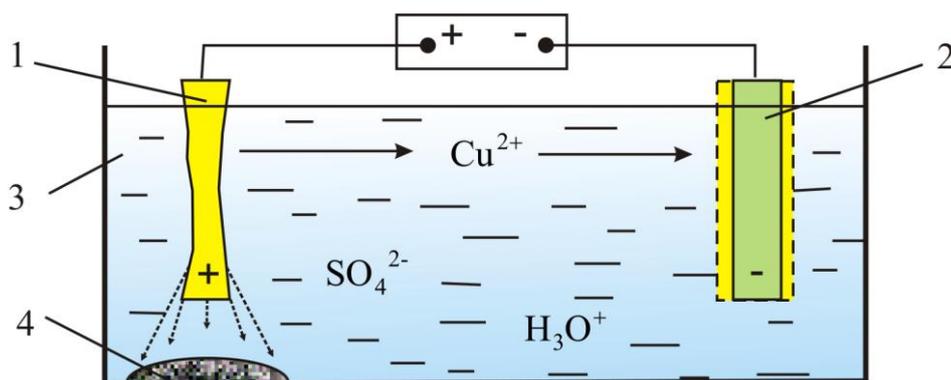


Рис. 9.11

На рисунке 9.11 приведена схема электролитического рафинирования меди.

**Гальванотехника** – область прикладной электрохимии, занимающаяся процессами нанесения металлических покрытий на поверхность как металлических, так и неметаллических изделий при прохождении постоянного электрического тока через растворы их солей. Гальванотехника подразделяется на **гальваностегию** и **гальванопластику**.

**Гальваностегия** (от греч. покрывать) – это электроосаждение на поверхность металла другого металла, который прочно связывается (сцепляется) с покрываемым металлом (предметом), служащим катодом электролизера (рис. 9.12).

Способом гальваностегии можно покрыть деталь тонким слоем золота или серебра, хрома или никеля. С помощью электролиза можно наносить тончайшие металлические покрытия на различных металлических поверхностях. При таком способе нанесения покрытий, деталь используют в качестве катода, помещенного в раствор соли того металла, покрытие из которого необходимо получить. В качестве анода используется пластинка из того же металла.

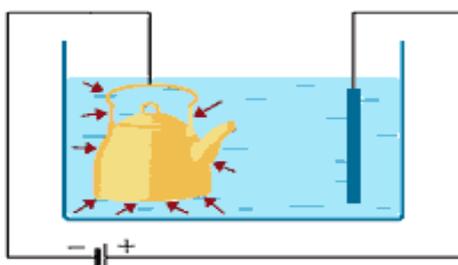


Рис. 9.12

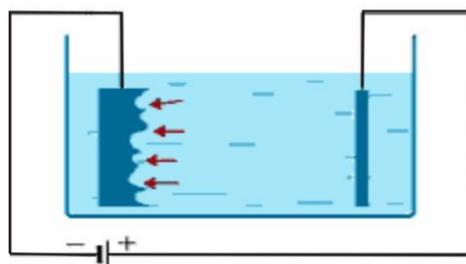


Рис. 9.13

**Гальванопластика** – получение путем электролиза точных, легко отделяемых металлических копий значительной толщины с различных как неметаллических, так и металлических предметов, называемых матрицами (рис. 9.13).

С помощью гальванопластики изготавливают бюсты, статуи и т. д. Гальванопластика используется для нанесения сравнительно толстых металлических покрытий на другие металлы (например, образование "накладного" слоя никеля, серебра, золота и т. д.).

### Контрольные вопросы. Упражнения

1. Какими опытами была выяснена природа носителей электрического тока в металлах?
2. Каковы основные идеи теории Друде–Лоренца?
3. Сравните порядок средних скоростей теплового и упорядоченного движения электронов в металлах (при условиях, близких к нормальным и приемлемым в электротехнике).
4. Почему тепловое движение электронов не может привести к возникновению электрического тока?
5. Выведите на основе классической теории электропроводности металлов дифференциальную форму законов Ома и Джоуля–Ленца.
6. Как классическая теория проводимости металлов объясняет зависимость сопротивления металлов от температуры?
7. В чем заключаются трудности элементарной классической теории электропроводности металлов? Каковы границы ее применения?
8. В чем проявляется качественное отличие полупроводников от металлов?
9. Приведите зависимости удельного сопротивления от температуры для полупроводников и металлов.
10. Дайте понятие зонной модели электронно-дырочной проводимости полупроводников.
11. Что называется легированием?
12. Какие существуют типы примесной проводимости?
13. Чем отличаются полупроводниковые диоды от транзисторов?
14. Что такое сверхпроводимость?
15. Что называется электролизом? Где он применяется?
16. Сформулируйте законы Фарадея.
17. Дайте классификацию электролитическим процессам.
18. Как применяется электролиз в гидрометаллургии?
19. Какого практического применения электролиза?
20. Чем отличается гальванопластика от гальваностегии?

## 1.9. Электрический ток в газах

### 1.9.1. Явление ионизации и рекомбинации в газах

В нормальном состоянии газы состоят из электрически нейтральных молекул и атомов и, следовательно, не могут проводить электрический ток. Поэтому газы являются хорошими электрическими изоляторами. Окружающий нас воздух является хорошим и самым дешёвым диэлектриком, и его изолирующие свойства широко используются в различных устройствах высокого напряжения (ЛЭП, подстанциях, электростатических генераторах и др.).

Проделаем опыт: разорвём цепь источника тока, т.е. создадим в ней воздушный промежуток. Если включить в такую разорванную цепь гальванометр, то он покажет отсутствие электрического тока.

Поднесём к воздушному промежутку пламя газовой горелки. В пламени происходят интенсивные химические процессы, за счёт энергии которых отдельные атомы могут возбуждаться и ионизироваться. Образующиеся в пламени горелки ионы и электроны переходят в возбужденный промежуток и под действием приложенной к нему разности потенциалов начинают двигаться к электродам; в цепи появляется ток.

*Процесс ионизации заключается в том, что под действием высокой температуры или некоторых лучей молекулы газа теряют электроны и тем самым превращаются в положительные ионы.*

Таким образом, в результате происходит освобождение электронов из атомов и молекул, которые могут присоединиться к нейтральным молекулам или атомам, превращая их в отрицательные ионы. Ионы и свободные электроны делают газ проводником электричества.

Ионизация газа может происходить под действием коротковолнового излучения – ультрафиолетовых, рентгеновских и гамма-лучей, а также альфа-, бета- и космических лучей.

Установлено, что в нормальных условиях газы, например воздух, обладают электрической проводимостью, но очень ничтожной. Эта проводимость вызвана излучением радиоактивных веществ, имеющих на поверхности земли, а также космическими лучами, приходящими из мировых глубин. Однако равновесная концентрация ионов в воздухе не превышает нескольких десятков пар ионов в кубическом сантиметре. Для того чтобы воздух стал заметно проводить электрический ток, его надо подвергнуть воздействию интенсивных ионизаторов.

Итак, при ионизации газовых молекул под действием внешнего источника из молекулы обычно вырывается один электрон и остаётся положительный молекулярный ион с зарядом  $e^+$ , т.е. образуется пара – поло-

жительный ион и электрон. Вырвавшийся электрон обычно присоединяется к какой-либо другой молекуле и образует отрицательный молекулярный ион с зарядом  $e^-$ , опять образуется пара – положительный и отрицательный ионы. Оба типа ионов одновалентны ( $z = 1$ ), имеют одинаковую концентрацию  $n$ , но несколько различные подвижности:  $\mu_+$  и  $\mu_-$ . Под действием внешнего электрического поля эти ионы начинают двигаться и возникает *электрический ток*.

*Электрический ток, возникающий в процессе ионизации газа, – ток в газах – это встречный поток ионов и свободных электронов.*

Наряду с термином «*ионизация*» часто употребляют термин «*генерация*», характеризующий тот же самый процесс образования носителей зарядов в газе.

Одновременно с процессом ионизации идёт обратный процесс – *рекомбинации* (иначе – *молизации*).

*Рекомбинация – это нейтрализация при встрече разноименных ионов или воссоединение иона и электрона в нейтральную молекулу (атом).*

*Факторы, под действием которых возникает ионизация в газе, называют внешними ионизаторами, а возникающая при этом проводимость называется **несамостоятельной проводимостью**.*

При данной мощности внешнего ионизатора в объёме газа устанавливается *равновесное состояние*, при котором число пар ионов, возникающих под действием ионизатора за одну секунду в единице объёма, равно числу пар рекомбинировавших ионов. При этом *скорость ионизации равна скорости рекомбинации*:

$$v^{\text{ген}} = v^{\text{рек}}. \quad (1.9.1)$$

Таким образом, ионизованный газ способен проводить ток. Явление прохождения электрического тока через газ называется *газовым разрядом*. Газовые разряды можно разделить на два вида: *несамостоятельный и самостоятельный*.

### 1.9.2. Несамостоятельный газовый разряд

*Несамостоятельным газовым разрядом называется такой разряд, который, возникнув при наличии электрического поля, может существовать только под действием внешнего ионизатора.*

Рассмотрим физические процессы, имеющие место при самостоятельном газовом разряде. Введем ряд обозначений: обозначим через  $N_0$  число молекул газа в исследуемом объёме  $V$ . Концентрация молекул  $n_0 = N_0/V$ . Часть молекул ионизирована. Обозначим число ионов одного знака через  $N$ ; их концентрация  $n = N/V$ . Далее, обозначим через

$\Delta n_i$  число пар ионов, возникающих под действием ионизатора за одну секунду в единице объема газа.

Наряду с процессом ионизации в газе происходит рекомбинация ионов. Вероятность встречи двух ионов разных знаков пропорциональна как числу положительных, так и числу отрицательных ионов, а эти числа, в свою очередь, равны  $n$ . Следовательно, число пар ионов, рекомбинирующих за секунду в единице объема, пропорционально  $n^2$ :

$$\Delta n_r = rn^2, \quad (1.9.2)$$

где  $r$  – коэффициент рекомбинации.

В состоянии равновесия число возникающих ионов в единице объема равно числу рекомбинирующих:

$$\Delta n_i = \Delta n_r = rn^2. \quad (1.9.3)$$

Отсюда для равновесной концентрации ионов (числа пар ионов в единице объема) получается следующее выражение:

$$n = \sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}}. \quad (1.9.4)$$

Схема эксперимента с газоразрядной трубкой изображена на рис. 1.9.1.

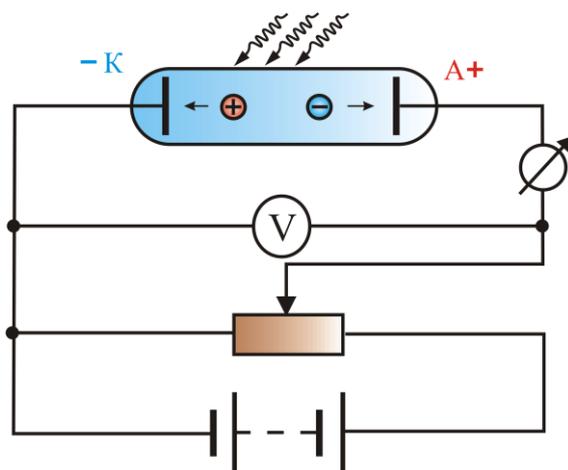


Рис. 1.9.1

Проанализируем далее действие электрического поля на процессы в ионизованных газах. Подадим постоянное напряжение на электроды. Положительные ионы будут направляться к отрицательному электроду, а отрицательные заряды – к положительному электроду. Таким образом, часть носителей из газоразрядного промежутка будет уходить к электродам (в цепи возникнет электрический ток). Пусть из единицы объема уходит ежесекундно  $\Delta n_i$  пар ионов. Теперь условие равновесия можно представить в виде

$$\Delta n_i = \Delta n_r + \Delta n_j. \quad (1.9.5)$$

1. Рассмотрим случай **слабого поля**:  $\Delta n_j \ll \Delta n_r$ . В цепи будет протекать **слабый ток**. Плотность тока по величине пропорциональна концентрации носителей  $n$ , заряду  $q$ , переносимому каждым носителем, и скорости направленного движения положительных и отрицательных ионов ( $\vec{v}^+$  и  $\vec{v}^-$ ):

$$\vec{j} = nq(\vec{v}^+ + \vec{v}^-). \quad (1.9.6)$$

Скорость направленного движения ионов выражается через **подвижность**  $\mu$  и **напряженность**  $\vec{E}$  электрического поля:

$$\vec{v}^+ = \mu_+ \vec{E}, \quad \vec{v}^- = \mu_- \vec{E}. \quad (1.9.7)$$

**Подвижность** – физическая величина, численно равная скорости направленного движения ионов в газе под действием поля с напряженностью 1 В/м.

На основании (1.9.6) для плотности тока имеем

$$\vec{j} = nq(\mu_+ + \mu_-)\vec{E}. \quad (1.9.8)$$

В слабом поле ( $\Delta n_j \ll \Delta n_r$ ) равновесная концентрация равна  $n = \sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}}$ .

Подставим это выражение в (1.9.7):

$$\vec{j} = q\sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}}(\mu_+ + \mu_-)\vec{E}. \quad (1.9.9)$$

В последнем выражении множитель при  $\vec{E}$  не зависит от напряженности. Обозначив его через  $\sigma$ , получим **закон Ома в дифференциальной форме**:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (1.9.10)$$

где  $\sigma = q\sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}}(\mu_+ + \mu_-)$  – удельная электропроводность.

**Вывод:** в случае слабых электрических полей ток при несамостоятельном разряде подчиняется закону Ома.

2. Рассмотрим **сильное поле**. В этом случае  $\Delta n_r \ll \Delta n_j$  и  $\Delta n_i = \Delta n_j$ , т.е. все генерируемые ионы уходят из газоразрядного промежутка под действием электрического поля. Это объясняется тем, что за время, требующееся иону, чтобы пролететь в сильном поле  $\vec{E}$  от одного электрода к другому, ионы не успевают сколько-нибудь заметно рекомбинировать. Поэтому все ионы, производимые ионизатором, участвуют в создании тока и уходят на электроды. А т. к. число генерируемых ионизатором ионов в единицу времени ( $\Delta n_i$ ) не зависит от напряженности поля, то

плотность тока будет определяться только величиной  $\Delta n_i$  и не будет зависеть от  $\vec{E}$ . Другими словами, с дальнейшим увеличением приложенного напряжения ток перестает расти и *остается постоянным*.

Максимальное значение тока, при котором все образующиеся ионы уходят к электродам, носит название *тока насыщения*.

Дальнейшее увеличение напряженности поля ведет к образованию *лавины* электронов, когда возникшие под действием ионизатора электроны приобретают на длине свободного пробега (от столкновения до столкновения) энергию, достаточную для ионизации молекул газа (ударная ионизация). Возникшие при этом вторичные электроны, разогнавшись, в свою очередь, производят ионизацию и т.д. – происходит лавинообразное размножение первичных ионов и электронов, созданных внешним ионизатором, и усиление разрядного тока.

На рис. 1.9.2 изображен процесс образования лавины.

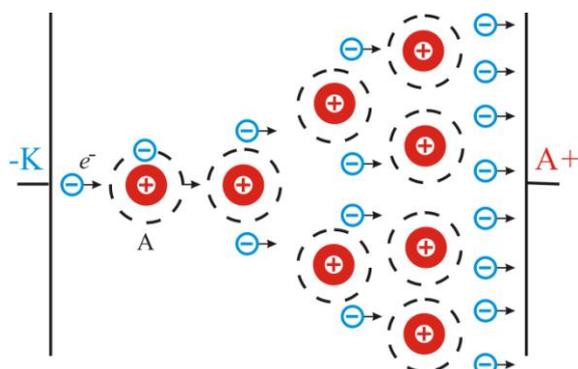


Рис. 1.9.2

Полученные результаты можно изобразить графически (рис. 1.9.3) в виде вольтамперной характеристики несамостоятельного газового разряда.

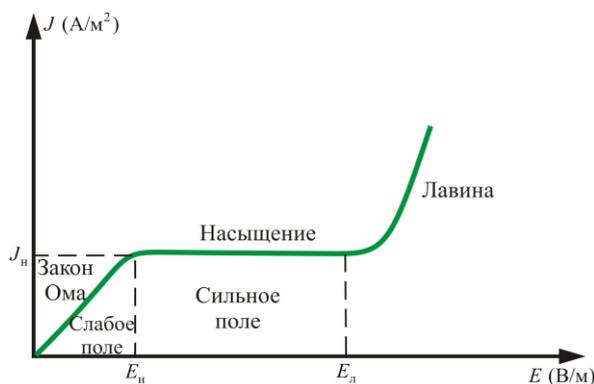


Рис. 1.9.3

**Вывод:** для несамостоятельного разряда при малых плотностях тока, т.е. когда основную роль в исчезновении зарядов из газоразрядного промежутка играет процесс рекомбинации, имеет место закон Ома ( $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ ); при больших полях ( $E \geq E_n$ ) закон Ома не выполняется – наступает явление насыщения, а при полях, превышающих  $E_n$ , – возникает лавина зарядов, обуславливающая значительное увеличение плотности тока.

### 1.9.3. Самостоятельный газовый разряд

Рассмотренный выше процесс возникновения и образования лавин за счет ударной ионизации не утрачивает характера несамостоятельного разряда, т.к. в случае прекращения действия внешнего ионизатора разряд быстро исчезает.

Однако возникновение и образование лавины зарядов не ограничивается процессом ударной ионизации. При дальнейшем, сравнительно небольшом, увеличении напряжения на электродах газоразрядного промежутка положительные ионы приобретают большую энергию и, ударяясь о катод, выбивают из него электроны, происходит **вторичная электронная эмиссия**. Возникшие свободные электроны на пути к аноду производят ударную ионизацию молекул газа. Положительные ионы на пути к катоду при электрических полях  $E = E_n$  сами ионизируют молекулы газа.

Если каждый выбитый с катода электрон способен ускориться и производить ударную ионизацию молекул газа, то разряд будет поддерживаться и после прекращения воздействия внешнего ионизатора. Напряжение, при котором развивается самостоятельный разряд, называется **напряжением замыкания**.

На основании сказанного **самостоятельным разрядом** будем называть такой газовый разряд, в котором носители тока возникают в результате тех процессов в газе, которые обусловлены приложенным к газу напряжением, т. е. данный разряд продолжается и после прекращения действия ионизатора.

Когда межэлектродный промежуток перекрывается полностью проводящей газоразрядной плазмой, наступает его **пробой**. Напряжение, при котором происходит пробой межэлектродного промежутка, называется **пробивным напряжением**. А соответствующая напряженность электрического поля носит название **пробивная напряженность**.

Рассмотрим условия возникновения и поддержания самостоятельного разряда.

При больших напряжениях между электродами газового промежутка ток сильно возрастает. Это происходит вследствие того, что возникающие под действием внешнего ионизатора электроны, сильно ускоренные электрическим полем, сталкиваются с нейтральными молекулами газа и ионизируют их. В результате этого образуются *вторичные электроны* и *положительные ионы* (процесс 1, рис. 1.9.4). Положительные ионы движутся к катоду, а электроны – к аноду. Вторичные электроны вновь ионизируют молекулы газа, и, следовательно, общее количество электронов и ионов будет возрастать, по мере продвижения электронов к аноду, лавинообразно. Это и является причиной увеличения электрического тока. Описанный процесс называется *ударной ионизацией*.

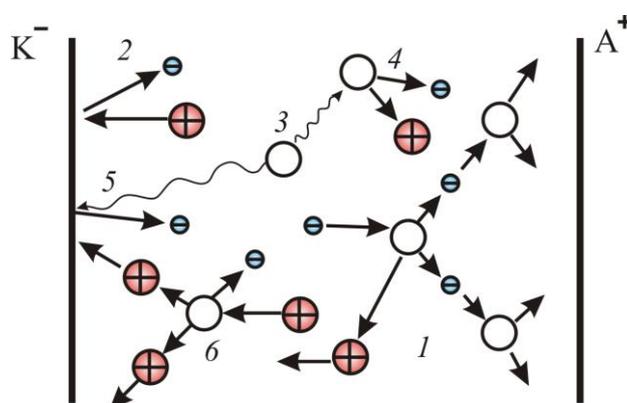


Рис. 1.9.4

Однако ударная ионизация под действием электронов недостаточна для поддержания разряда при удалении внешнего ионизатора. Для этого необходимо, чтобы электронные лавины «воспроизводились», т.е. чтобы в газе под действием каких-то процессов возникали новые электроны. Это следующие процессы:

- ускоренные электрическим полем положительные ионы, ударяясь о катод, выбивают из него электроны (процесс 2);
- положительные ионы, сталкиваясь с молекулами газа, переводят их в возбужденное состояние; переход таких молекул в основное состояние сопровождается испусканием фотонов (процесс 3);
- фотон, поглощенный нейтральной молекулой, ионизирует ее, происходит процесс фотонной ионизации молекул (процесс 4);
- выбивание электронов из катода под действием фотонов (процесс 5);
- наконец, при значительных напряжениях между электродами газового промежутка наступает момент, когда положительные ионы, обладающие меньшей длиной свободного пробега, чем электроны, приоб-

ретают энергию, достаточную для ионизации молекул газа (процесс б), и к отрицательной пластине устремляются ионные лавины. Когда возникают, кроме электронных лавин, еще и ионные, сила тока растет уже практически без увеличения напряжения.

### 1.9.4. Типы разрядов

В зависимости от давления газа, конфигурации электродов и параметров внешней цепи существует четыре типа самостоятельных разрядов:

- тлеющий;
- искровой;
- дуговой;
- коронный.

1. **Тлеющий разряд** возникает при низких давлениях. Его можно наблюдать в стеклянной трубке с впаянными у концов плоскими металлическими электродами (рис. 1.9.5). Вблизи катода располагается тонкий светящийся слой, называемый *катодной светящейся пленкой* 2.

Между катодом и пленкой находится *астонново темное пространство* 1. Справа от светящейся пленки помещается слабо светящийся слой, называемый *катодным темным пространством* 3. Этот слой переходит в светящуюся область, которую называют *тлеющим свечением* 4, с тлеющим пространством граничит темный промежуток – *фарадеево темное пространство* 5. Все перечисленные слои образуют *катодную часть* тлеющего разряда. Вся остальная часть трубки заполнена светящимся газом. Эту часть называют *положительным столбом* 6.

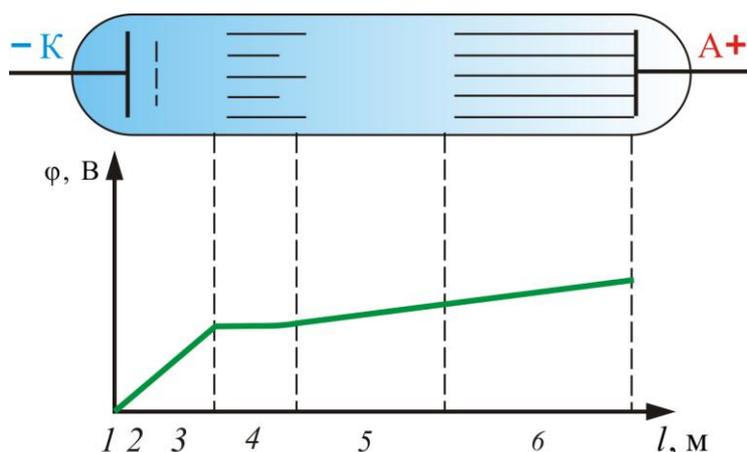


Рис. 1.9.5

При понижении давления катодная часть разряда и фарадеево темное пространство увеличиваются, а положительный столб укорачивается.

Измерения показали, что почти все падения потенциала приходится на первые три участка разряда (астоново темное пространство, катодная свящаяся плёнка и катодное тёмное пятно). Эту часть напряжения, приложенного к трубке, называют *катодным падением потенциала*.

В области тлеющего свечения потенциал не изменяется – здесь напряженность поля равна нулю. Наконец, в фарадеевом тёмном пространстве и положительном столбе потенциал медленно растёт.

Такое распределение потенциала вызвано образованием в катодном темном пространстве положительного пространственного заряда, обусловленного повышенной концентрацией положительных ионов.

Положительные ионы, ускоренные катодным падением потенциала, бомбардируют катод и выбивают из него электроны. В астоновом темном пространстве эти электроны, пролетевшие без столкновений в область катодного тёмного пространства, имеют большую энергию, вследствие чего они чаще ионизируют молекулы, чем возбуждают, т.е. интенсивность свечения газа уменьшается, но зато образуется много электронов и положительных ионов. Образовавшиеся ионы вначале имеют очень малую скорость, и потому в катодном тёмном пространстве создаётся положительный пространственный заряд, что и приводит к перераспределению потенциала вдоль трубки и к возникновению катодного падения потенциала.

Электроны, возникшие в катодном тёмном пространстве, проникают в область тлеющего свечения, которая характеризуется высокой концентрацией электронов и положительных ионов, колларным пространственным зарядом, близким к нулю (плазма). Поэтому напряженность поля здесь очень мала. В области тлеющего свечения идёт интенсивный процесс рекомбинации, сопровождающийся излучением выделяющейся при этом энергии. Таким образом, тлеющее свечение есть в основном свечение рекомбинации.

Из области тлеющего свечения в фарадеево тёмное пространство электроны и ионы проникают за счёт диффузии. Вероятность рекомбинации здесь сильно падает, т.к. концентрация заряженных частиц невелика. Поэтому в фарадеевом тёмном пространстве имеется поле. Увлекаемые этим полем электроны накапливают энергию и часто, в конце концов, возникают условия, необходимые для существования плазмы. Положительный столб представляет собой газоразрядную плазму. Он выполняет роль проводника, соединяющего анод с катодными частями разряда. Свечение положительного столба вызвано в основном переходами возбужденных молекул в основное состояние.

**2. Искровой разряд** возникает в газе обычно при давлениях порядка атмосферного. Он характеризуется прерывистой формой. По внеш-

нему виду искровой разряд представляет собой пучок ярких зигзагообразных разветвляющихся тонких полос, мгновенно пронизывающих разрядный промежуток, быстро гаснущих и постоянно сменяющих друг друга (рис. 1.9.6). Эти полосы называют *искровыми каналами*.

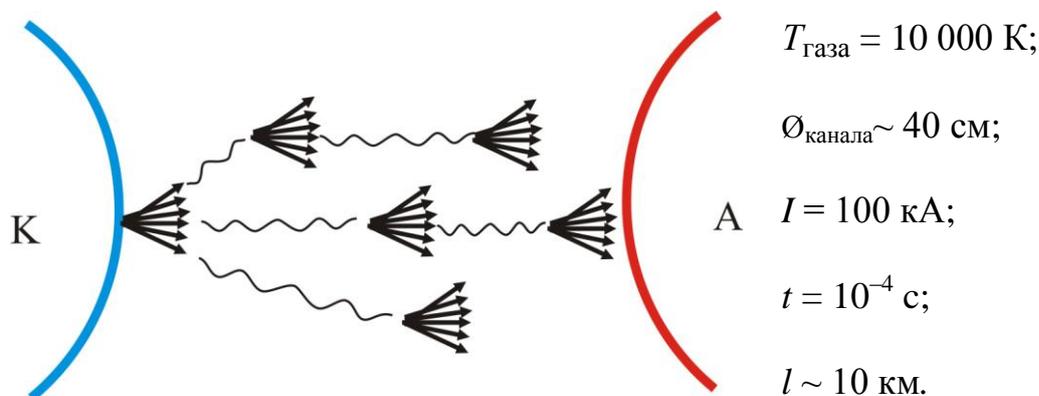


Рис. 1.9.6

После того как разрядный промежуток «пробит» искровым каналом, сопротивление его становится малым, через канал проходит кратковременный импульс тока большой силы, в течение которого на разрядный промежуток приходится лишь незначительное напряжение. Если мощность источника не очень велика, то после этого импульса тока разряд прекращается. Напряжение между электродами начинает повышаться до прежнего значения, и пробой газа повторяется с образованием нового искрового канала.

В естественных природных условиях искровой разряд наблюдается в виде молнии. На рис. 1.9.7 изображен пример искрового разряда – молния продолжительностью 0.2–0.3 с, силой тока  $10^4$ – $10^5$  А, длиной 20 км.



Рис. 1.9.7

3. **Дуговой разряд.** Если после получения искрового разряда от мощного источника постепенно уменьшать расстояние между электродами, то разряд из прерывистого становится непрерывным, возникает новая форма газового разряда, называемая *дуговым разрядом* (рис. 1.9.8).

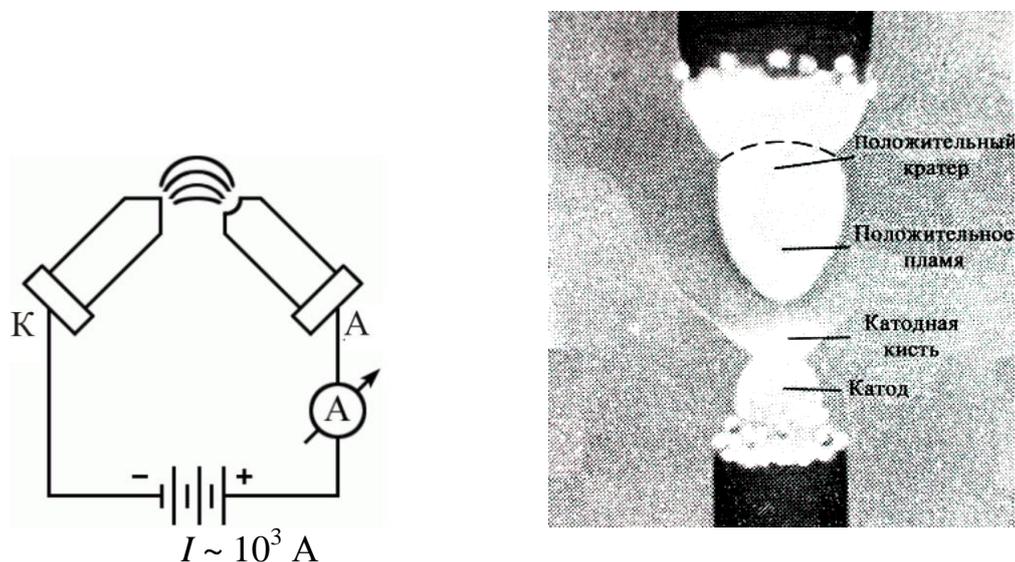


Рис. 1.9.8

При этом ток резко увеличивается, достигая десятков и сотен ампер, а напряжение на разрядном промежутке падает до нескольких десятков вольт. Согласно В.Ф. Литкевичу (1872–1951), дуговой разряд поддерживается главным образом за счет термоэлектронной эмиссии с поверхности катода. На практике – это сварка, мощные дуговые печи.

4. **Коронный разряд** (рис. 1.9.9) возникает в сильном неоднородном электрическом поле при сравнительно высоких давлениях газа (порядка атмосферного). Такое поле можно получить между двумя электродами, поверхность одного из которых обладает большой кривизной (тонкая проволочка, острие).

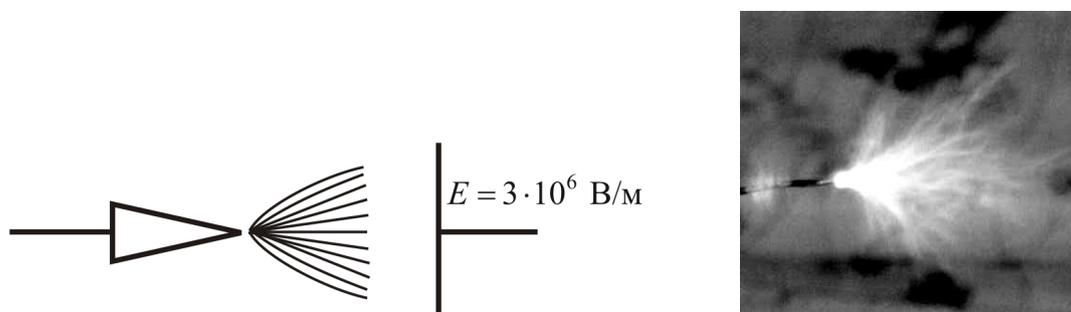


Рис. 1.9.9

Наличие второго электрода необязательно, но его роль могут играть ближайшие окружающие заземленные металлические предметы. Когда электрическое поле вблизи электрода с большой кривизной достигает примерно  $3 \cdot 10^6$  В/м, вокруг него возникает свечение, имеющее вид оболочки или короны, откуда и произошло название заряда.

### 1.9.5. Применение газового разряда

Глубокое понимание процессов, сопровождающих газовый разряд, привело к созданию ряда приборов и устройств, которые широко используются в различных областях науки и техники. Самые распространённые приборы, основанные на явлении газового разряда, можно разделить на следующие группы:

- Тиратроны и газотроны тлеющего разряда.
- Стабилитроны тлеющего и коронного разрядов.
- Счётчики коммутаторные, векотроны.
- Индикаторы тлеющего разряда.
- Газотроны, тиратроны с наполненным катодом.
- Импульсные водородные тиратроны с наполненным катодом.

Газоразрядные приборы очень разнообразны и различаются видом используемого разряда. Они предназначены для стабилизации напряжения, защиты от перенапряжения, выполнения переключательных функций, индикации электрического состояния для регистрации заряженных частиц и т.д.

Искровой разряд нашел широкое применение в науке и технике. С его помощью инициируют взрывы и процессы горения.

В последнее время для повышения защиты уязвимых и ответственных объектов, например пусковых комплексов ракет, пытаются реализовать различные формы управления молнией, в частности лазерное инициирование молнии. Лазерное инициирование основано на создании в воздухе ионизованного канала с помощью лазерного излучения.

### 1.9.6. Понятие о плазме

В газовом разряде возникает большое количество положительных ионов вследствие высокой эффективности ударной ионизации, причем концентрация ионов и электронов одинакова. Такая система из электронов и положительных ионов, распределенных с одинаковой концентрацией, называется *плазмой*. Термин «плазма» был введен в 1929 г. американскими физиками И. Ленгмюром и Л. Тонксом.

Плазма, возникающая в газовом разряде, носит название газоразрядной; к ней относятся положительный столб тлеющего разряда, канал искрового и дугового разрядов.

Положительный столб представляет собой так называемую *неизотермическую плазму*. В такой плазме средние кинетические энергии электронов, ионов и нейтральных молекул (атомов) различны.

Вспомним связь между средней кинетической энергией молекул идеального газа (давление газа в тлеющем разряде невелико, поэтому его можно считать идеальным) и температурой:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT.$$

Можно утверждать, что температуры компонентов плазмы различны. Так, электронная температура в тлеющем разряде в неоне при давлении 3 мм рт. ст. – порядка  $4 \cdot 10^4$  К, а температура ионов и атомов – 400 К, причем температура ионов несколько выше атомной температуры.

Плазма, в которой выполняется равенство  $T_э = T_и = T_а$  (где индексы «э», «и», «а» относятся к электронам, ионам, атомам), **называется изотермической**. Такая плазма имеет место при ионизации с помощью высокой температуры (дуга, горящая при атмосферном и выше давлении, искровой канал); например, в дуге сверхвысокого давления (до 1000 атм.) температура плазмы достигает 10 000 К, температура плазмы при термоядерном взрыве – порядка нескольких десятков миллионов градусов, в установке «ТОКАМАК» для исследования термоядерных реакций – порядка  $7 \cdot 10^6$  К (рис. 1.9.10).

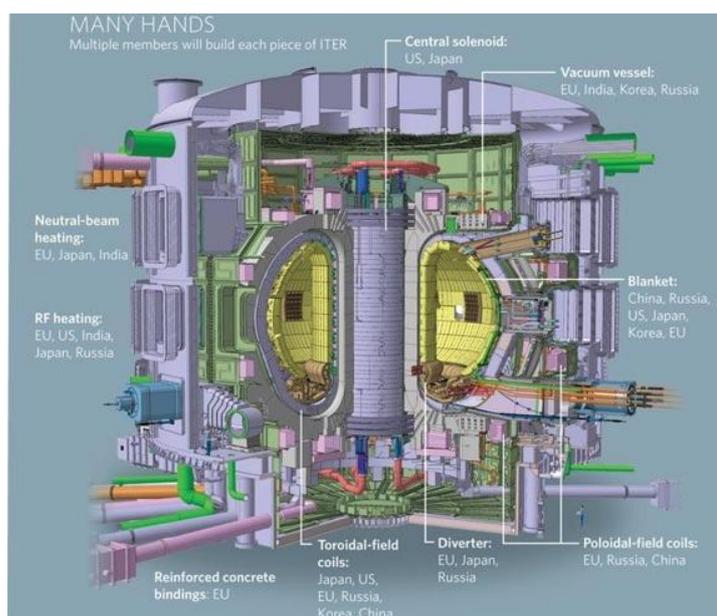


Рис. 1.9.10

Плазма может возникнуть не только при прохождении тока через газ. Газ можно перевести в плазменное состояние и путем его нагревания до высоких температур. Внутренние области звезд (в т. ч. и солнце) находятся в плазменном состоянии, температуры которых достигают  $10^8$  К.

Кулоновское далекодействующее взаимодействие заряженных частиц в плазме приводит к качественному своеобразию плазмы, позволяющему считать ее особым, *четвертым, агрегатным состоянием вещества.*

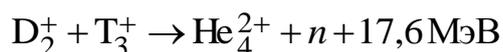
### **Важнейшие свойства плазмы:**

- сильное взаимодействие с внешними магнитными и электрическими полями, связанное с ее высокой электропроводностью;
- специфическое коллективное взаимодействие частиц плазмы, осуществляющееся через усредненные электрические и магнитные поля, которые создают сами эти частицы;
- благодаря коллективным взаимодействиям плазма ведет себя как своеобразная упругая среда, в которой легко возбуждаются и распространяются различного рода колебания и волны (например, ленгмюровские колебания плазмы);
- во внешнем магнитном поле плазма ведет себя как диамагнитная среда;
- удельная электрическая проводимость  $\sigma$  полностью ионизированной плазмы не зависит от плотности плазмы и увеличивается с ростом термодинамической температуры пропорционально  $T^{3/2}$ . При  $T \geq 10^7$  К  $\sigma$  столь велика, что плазму можно приближенно считать идеальным проводником ( $\sigma \rightarrow \infty$ ).

Плазма – наиболее распространенное состояние вещества во Вселенной. Солнце и другие звезды состоят из полностью ионизированной высокотемпературной плазмы. Основным источником энергии излучения звезд – термодинамические реакции синтеза, протекающие в недрах звезд при огромных температурах. Холодные туманности и межзвездная среда также находятся в плазменном состоянии. Они представляют собой низкотемпературную плазму, ионизация которой происходит главным образом путем фотоионизации под действием ультрафиолетового излучения звезд. В околоземном пространстве слабоионизованная плазма находится в радиационных поясах и ионосфере Земли. С процессами, происходящими в этой плазме, связаны такие явления, как магнитные бури, нарушения дальней радиосвязи и полярные сияния.

Низкотемпературная газоразрядная плазма, образующаяся при тлеющем, искровом и дуговом разрядах в газах, широко используется в различных источниках света, в газовых лазерах, для сварки, резки, плавки и других видов обработки металлов.

Основной практический интерес к физике плазмы связан с решением проблемы управляемого термоядерного синтеза – процесс слияния легких атомных ядер при высоких температурах в управляемых условиях (рис. 1.9.11). Энергетический выход реактора составляет  $10^5$  кВт/м<sup>3</sup> в реакции



при плотности плазмы  $10^5$  см<sup>-3</sup> и температуре  $10^8$  К.

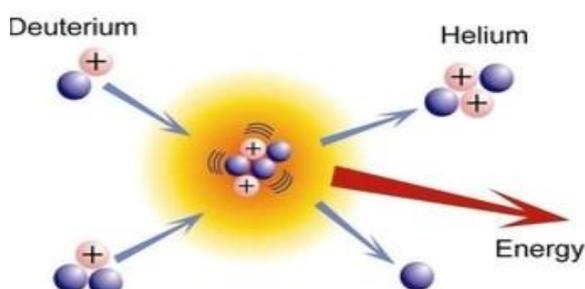


Рис. 1.9.11

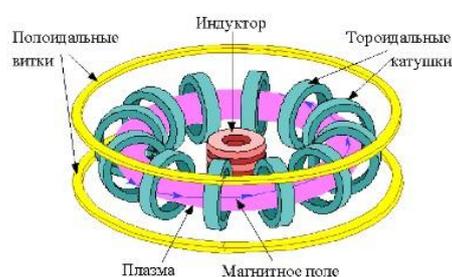


Рис. 1.9.12

Удерживать высокотемпературную плазму предлагается (1950 г., СССР, И.Е. Тамм, А.Д. Сахаров) сильным магнитным полем в тороидальной камере с магнитными катушками, сокращенно – **токамак** (рис.1.9.12). Управление термоядерной реакцией в высокотемпературной плазме позволит человечеству в будущем получить практически неисчерпаемый источник энергии.

Низкотемпературная плазма ( $T \sim 10^3$  К) находит применение в газоразрядных источниках света, газовых лазерах, термоэлектронных преобразователях тепловой энергии в электрическую. Возможно создание плазменного двигателя, эффективного для маневрирования в космическом пространстве и длительных космических полетов.

Плазма служит в качестве рабочего тела в плазменных ракетных двигателях и *магнитогидродинамическом генераторе* (МГД-генератор).

Движение плазмы в магнитном поле используется в методе прямого преобразования внутренней энергии ионизованного газа в электрическую. Этот метод осуществлен в МГД-генераторе, принципиальная схема которого показана на рис. 1.9.13.

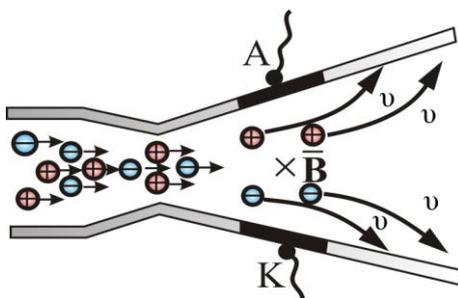


Рис. 1.9.13

Сильно нагретый ионизованный газ, образующийся в результате сгорания топлива и обогащения продуктов сгорания парами щелочных металлов, которые способствуют повышению степени ионизации газа, проходит через сопло и расширяется в нем. При этом часть внутренней энергии газа преобразуется в его кинетическую энергию. В поперечном магнитном поле (рис. 1.9.13) вектор  $\vec{B}$  магнитной индукции поля направлен за плоскость чертежа, положительные ионы отклоняются под действием сил Лоренца к верхнему электроду А, а свободные электроны – к нижнему электроду К. При замыкании электродов на внешнюю нагрузку в ней идет электрический ток, направленный от анода А, МГД-генератора к его катоду К.

Более подробно устройство МГД-генератора показано на рис. 1.9.14.

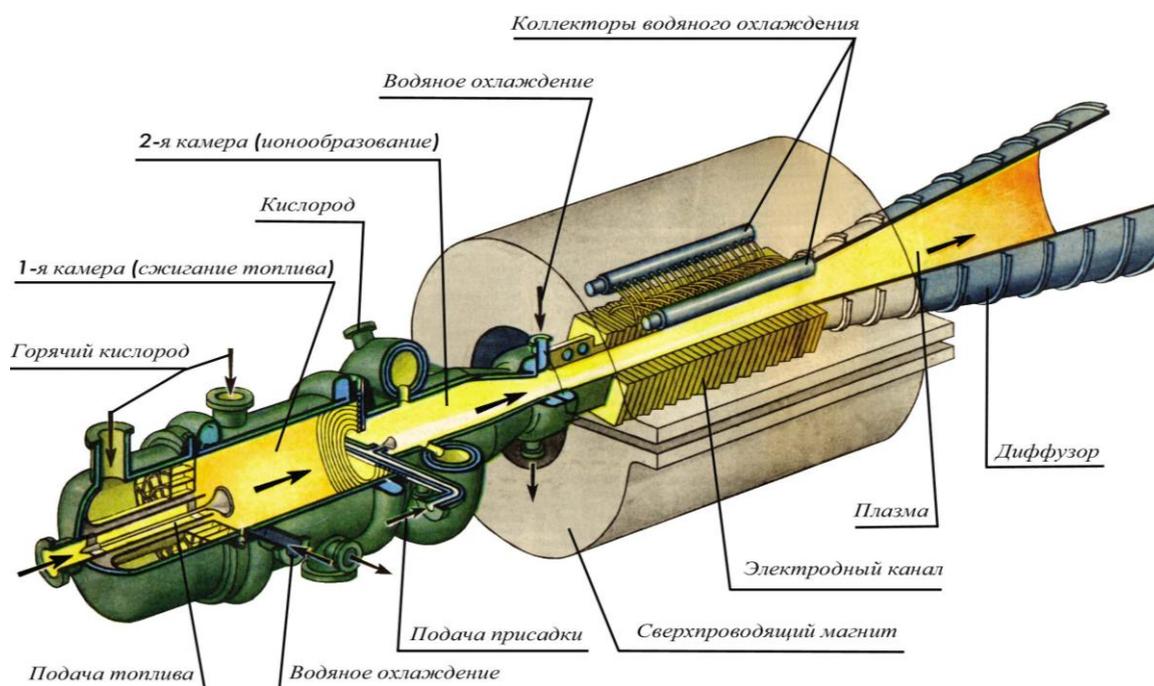


Рис. 1.9.14

### Контрольные вопросы. Упражнения

1. Дайте определение процессам ионизации и рекомбинации.
2. Назовите два вида газовых разрядов.
3. Выполняется ли закон Ома при несамостоятельном газовом разряде?
4. Как происходит газовый разряд в сильном поле? Дайте понятие тока насыщения.
5. Изобразите процесс образования лавины.
6. Приведите вольтамперную характеристику несамостоятельного газового разряда.
7. Какой разряд называется самостоятельным?
8. Каковы условия возникновения и поддержания самостоятельного разряда?
9. Охарактеризуйте типы самостоятельного газового разряда. В чем их особенности?
10. Приведите характеристики газовых разрядов?
11. Где применяются газовые разряды?
12. К какому типу газового разряда относится молния?
13. Может ли возникнуть ток насыщения при самостоятельном газовом разряде?
14. В чем отличие самостоятельного газового разряда от несамостоятельного? Каковы условия, необходимые для его осуществления?
15. Дайте понятие плазмы.
16. В чем отличие равновесной плазмы от неравновесной?
17. Приведите важнейшие свойства плазмы.
18. Чем обусловлен практический интерес к физике плазмы?
19. Что такое токамак?
20. Как используется плазма в магнетогидродинамическом генераторе?
21. Приведите примеры использования газоразрядных элементов в экранах плоских телевизоров.
22. Расскажите о методе прямого преобразования внутренней энергии ионизованного газа в электрическую.
23. Опишите устройство МГД-генератора и принцип его работы.

## 2. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

### 2.1. Магнитное поле

#### 2.1.1. Магнитные взаимодействия

В 1820 г. датский ученый Ганс Христиан Эрстед открыл явление отклонения магнитной стрелки гальваническим током и тем самым сделал первый существенный шаг в выяснении характера связи электрических и магнитных явлений. Затем французские ученые Гей-Люссак и Араго наблюдали намагничивание железа постоянным током, идущим в проводнике. Ампер обнаружил притяжение между проводниками, по которым проходят параллельные токи, и отталкивание между противоположно направленными токами. Им же была выдвинута гипотеза о том, что свойства постоянных магнитов обусловлены циркулирующими в их толще постоянными круговыми токами (молекулярными токами).

Был сделан общий вывод: *вокруг всякого проводника с током есть магнитное поле*

Итак, *вокруг всякого движущегося заряда помимо электрического поля существует еще и магнитное. Магнитное поле – это поле движущихся зарядов.* Известно, что оно обнаруживает себя по действию на магнитные стрелки или на проводники с токами, т.е. на движущиеся заряды.

Дальше мы увидим, что, подобно электрическому полю, оно обладает энергией и, следовательно, массой. Магнитное поле материально. Теперь можно дать следующее определение магнитного поля: *магнитное поле – это материя, связанная с движущимися зарядами и обнаруживающая себя по действию на магнитные стрелки и движущиеся заряды, помещенные в это поле.*

Для анализа магнитного поля используются контуры с током.

Возьмем такой контур с током  $I$  и поместим его в магнитное поле.

В магнитном поле контур с током будет ориентироваться определенным образом. Ориентацию контура в пространстве будем характеризовать направлением нормали  $\vec{n}$ , связанной с движением тока *правилом правого винта, или «правилом буравчика»* (рис. 2.1.1).

Итак, на контур с током в магнитном поле действует вращающий момент. Контур ориентируется в данной точке поля только одним способом. Примем положительное направление нормали  $\vec{n}$  за направление магнитного поля  $\vec{B}$  в данной точке. Вращающий момент прямо пропорционален величине тока  $I$ , площади контура  $S$  и синусу угла между направлением магнитного поля и нормали  $\vec{n}$ :

$$M \sim IS \sin(\vec{n}, \vec{B}),$$

здесь  $M$  – **вращающий момент**, или **момент силы**;  $IS = P_m$  – **магнитный момент** контура (аналогично  $ql = \vec{P}$  – электрический момент диполя).

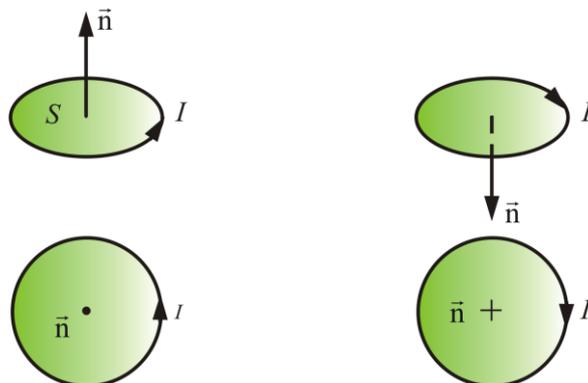


Рис. 2.1.1

Направление вектора магнитного момента совпадает с положительным направлением нормали:

$$\vec{P}_m = P_m \vec{n}. \quad (2.1.1)$$

Отношение момента силы к магнитному моменту  $\frac{M}{P_m}$  для данной точки магнитного поля будет одним и тем же и может служить характеристикой магнитного поля, названной **магнитной индукцией**:

$$B = \frac{M}{P_m \sin(\vec{n}, \vec{B})}, \quad (2.1.2)$$

или

$$\vec{B} = \frac{\vec{M}_{\max}}{\vec{P}_m},$$

где  $\vec{B}$  – вектор магнитной индукции, совпадающий с нормалью  $\vec{n}$ .

По аналогии с электрическим полем  $\vec{E} = \vec{F}/q$ .

Магнитная индукция  $\vec{B}$  характеризует силовое действие магнитного поля на ток (аналогично  $\vec{E}$  характеризует силовое действие электрического поля на заряд).

$\vec{B}$  – силовая характеристика магнитного поля, ее можно изобразить с помощью **магнитных силовых линий**.

Поскольку  $M$  – момент силы и  $P_m$  – магнитный момент являются характеристиками вращательного движения, то можно предположить, что магнитное поле – **вихревое**.

Условились за направление  $\vec{B}$  принимать направление северного конца магнитной стрелки. Силовые линии выходят из северного полюса, а входят соответственно в южный полюс магнита (рис. 2.1.2, а).

Для графического изображения полей удобно пользоваться силовыми линиями (линиями магнитной индукции). **Линиями магнитной индукции** называются кривые, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора  $\vec{B}$  в этой точке.

Магнитные силовые линии всегда замкнуты – вихревое поле (рис.2.1.2, б).

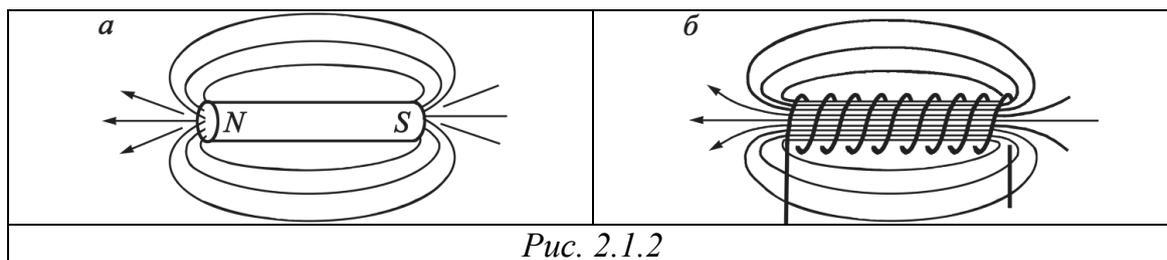


Рис. 2.1.2

### 2.1.2.Закон Био – Савара – Лапласа

Магнитное поле любого тока может быть вычислено как векторная сумма (суперпозиция) полей, создаваемых отдельными элементарными участками тока:

$$\vec{B} = \sum \vec{B}_i.$$

Элемент тока длины  $dl$  (рис. 2.1.3) создает поле с магнитной индукцией:

$$dB = k \frac{Idl}{r^2}, \quad (2.1.3)$$

или в векторной форме:

$$d\vec{B} = k \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (2.1.4)$$

Это и есть **закон Био – Савара – Лапласа**, полученный экспериментально.

Здесь  $I$  – ток;  $d\vec{l}$  – вектор, совпадающий с элементарным участком тока и направленный в ту сторону, куда течет ток;  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведенный от элемента тока в точку, в которой мы определяем  $d\vec{B}$ ;  $r$  – модуль радиус-вектора;  $k$  – коэффициент пропорциональности, зависящий от системы единиц.

Как видно из рисунка, **вектор магнитной индукции  $d\vec{B}$  направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через  $d\vec{l}$  и точку, в которой вычисляется поле.**

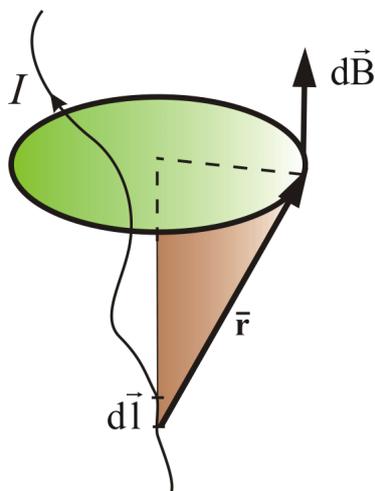


Рис. 2.1.3

Направление  $d\vec{B}$  связано с направлением  $d\vec{l}$  «**правилом буравчика**»: направление вращения головки винта дает направление  $d\vec{B}$ , поступательное движение винта соответствует направлению тока в элементе.

Таким образом, закон Био – Савара – Лапласа устанавливает величину и направление вектора  $d\vec{B}$  в произвольной точке магнитного поля, созданного проводником  $d\vec{l}$  с током  $I$ .

Модуль вектора  $d\vec{B}$  определяется соотношением

$$dB = k \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}, \quad (2.1.5)$$

где  $\alpha$  – угол между  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ ;  $k$  – коэффициент пропорциональности, зависящий от системы единиц.

В международной системе единиц СИ закон Био – Савара – Лапласа для вакуума можно записать так:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}, \quad (2.1.6)$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная постоянная.

### 2.1.3. Магнитное поле движущегося заряда

В уравнении (2.1.6) заменим ток  $I$  на  $jS$ , где  $j$  – плотность тока. Векторы  $\vec{j}$  и  $d\vec{l}$  имеют одинаковое направление, значит

$$Idl = Sjdl.$$

Если все заряды одинаковы и имеют заряд  $q$ , то

$$\vec{j} = qn\vec{v}, \quad (2.1.7)$$

где  $n$  – число носителей заряда в единице объема;  $\vec{v}$  – дрейфовая скорость зарядов.

Если заряды положительные, то  $\vec{j}$  и  $\vec{v}$  имеют одно направление. Подставив (2.1.7) в (2.1.6), получим

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Sdl n q [\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (2.1.8)$$

Обозначим  $dN = Sdl n$  – число носителей заряда в отрезке  $d\vec{l}$ . Разделив (2.1.8) на это число, получим выражение для **индукции магнитного поля, создаваемого одним зарядом**, движущимся со скоростью  $\vec{v}$ :

$$\vec{B}_1 = \frac{dB}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q [\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (2.1.9)$$

В скалярной форме **индукция магнитного поля одного заряда** в вакууме определяется по формуле

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \sin(\vec{v}, \vec{r})}{r^2}. \quad (2.1.10)$$

Эта формула справедлива при скоростях заряженных частиц  $v \ll c$ .

#### 2.1.4. Напряженность магнитного поля

Силовой характеристикой магнитного поля служит вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  поля, созданного одним зарядом в вакууме:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q [\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}.$$

Еще одной характеристикой магнитного поля является **напряженность**.

**Напряженностью магнитного поля** называют векторную величину  $\vec{H}$ , характеризующую магнитное поле и определяемую для вакуума следующим образом:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}. \quad (2.1.11)$$

Напряженность магнитного поля заряда  $q$ , движущегося в вакууме, равна

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{q [\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (2.1.12)$$

Это выражение показывает **закон Био – Савара – Лапласа для  $\vec{H}$** .

Напряженность магнитного поля  $\vec{H}$  является как бы аналогом вектора электрического смещения  $\vec{D}$  в электростатике.

### 2.1.5. Магнитное поле прямого тока

Применим закон Био – Савара – Лапласа для расчета магнитных полей простейших токов.

Рассмотрим магнитное поле прямого тока (рис. 2.1.4).

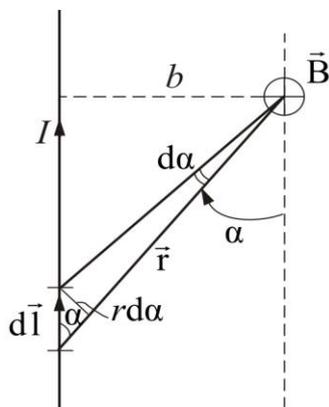


Рис. 2.1.4

Все векторы  $d\vec{B}$  от произвольных элементарных участков  $d\vec{l}$  имеют одинаковое направление. Поэтому сложение векторов можно заменить сложением модулей.

Пусть точка, в которой определяется магнитное поле, находится на расстоянии  $b$  от провода. Из рис. 2.1.4 видно, что

$$r = \frac{b}{\sin\alpha}; \quad dl = \frac{rd\alpha}{\sin\alpha} = \frac{bd\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Подставив найденные значения  $r$  и  $dl$  в закон Био – Савара – Лапласа, получим

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ib d\alpha \sin\alpha \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha \cdot b^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} \sin\alpha d\alpha.$$

Для **конечного проводника** угол  $\alpha$  изменяется от  $\alpha_1$  до  $\alpha_2$ . Тогда

$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2). \quad (2.1.13)$$

Для **бесконечно длинного проводника**  $\alpha_1 = 0$ , а  $\alpha_2 = \pi$ , тогда

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b},$$

или, что удобнее для расчетов,

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b}. \quad (2.1.14)$$

Линии магнитной индукции прямого тока представляют собой систему концентрических окружностей, охватывающих ток (рис. 2.1.3).

Аналогичным образом можно вычислить магнитное поле кругового тока.

### 2.1.6. Теорема Гаусса для вектора магнитной индукции

В природе нет магнитных зарядов. Это приводит к тому, что линии вектора  $\vec{B}$  не имеют ни начала, ни конца. Мы знаем, что поток любого вектора через поверхность равен разности числа линий, начинающихся у поверхности, и числа линий, оканчивающихся внутри поверхности:

$$\Phi = N_{\text{нач}} - N_{\text{оканч}}.$$

В соответствии с вышеизложенным можно сделать заключение, что поток вектора  $\vec{B}$  через замкнутую поверхность должен быть равен нулю.

Таким образом, для любого магнитного поля и произвольной замкнутой поверхности  $S$  имеет место условие

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (2.1.15)$$

**Это теорема Гаусса для  $\Phi_B$**  (в интегральной форме): **поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю.**

Этот результат является математическим выражением того, что в природе нет магнитных зарядов – источников магнитного поля, на которых начинались и заканчивались бы линии магнитной индукции.

Заменив поверхностный интеграл в (2.1.15) объемным, получим

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = 0, \quad (2.1.16)$$

где  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)$ .

Это условие должно выполняться для любого произвольного объема  $V$ , а это, в свою очередь, возможно, если подынтегральная функция в каждой точке поля равна нулю. Таким образом, магнитное поле обладает тем свойством, что его **дивергенция** всюду равна нулю:

$$\text{div } \vec{B} = 0. \quad (2.1.17)$$

В этом его отличие от электростатического поля, которое является потенциальным и может быть выражено скалярным потенциалом  $\phi$ , магнитное поле – *вихревое*, или *соленоидальное*.

### Контрольные вопросы. Упражнения

1. Как, пользуясь магнитной стрелкой, можно определить знаки полюсов источников постоянного тока?
2. Чему равен и как направлен магнитный момент рамки с током?
3. Что называют индукцией магнитного поля? Каково направление вектора  $\vec{B}$ ? Нарисуйте и покажите, как ориентированы линии магнитной индукции поля прямого тока?
4. Записав закон Био-Савара-Лапласа, объясните его физический смысл.
5. Рассчитайте, применяя закон Био-Савара-Лапласа, магнитное поле: 1) прямого тока; 2) в центре кругового проводника с током.
6. Какой вывод можно сделать, сравнивая циркуляцию векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ ?
7. Какая теорема доказывает вихревой характер магнитного поля? Как она формулируется?
8. Почему магнитное поле является вихревым?
9. Используя теорему о циркуляции вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ , рассчитайте магнитное поле тороида.
10. Что называют потоком вектора магнитной индукции? Запишите теорему Гаусса для магнитного поля, объяснив ее физический смысл.
11. Какая физическая величина выражается в веберах? Дайте определение вебера.
12. В магнитном поле с индукцией  $B$  поместили две параллельные металлические пластины, расстояние между которыми равно  $d$ . Поток электронов со скоростью  $v$  между пластинами движется прямолинейно параллельно плоскости пластин. Какова разность потенциалов между пластинами?
13. Какими магнитными свойствами может обладать вещество из атомов с нечетным числом электронов в оболочке в газообразном состоянии?
14. Рамка гальванометра площадью  $6 \text{ см}^2$ , содержащая 200 витков тонкой проволоки, находятся в магнитном поле с индукцией  $0,01 \text{ Тл}$ . Плоскость рамки параллельна линиям магнитной индукции. Если по виткам рамки протекает ток силой  $100 \text{ мА}$ , то максимальный вращающий момент, действующий на рамку, равен:
15. Проводник массой  $10 \text{ г}$  и длиной  $20 \text{ см}$  подвешен в горизонтальном положении в вертикальном магнитном поле с индукцией  $0,25 \text{ Тл}$ . На какой угол (в градусах) от вертикали отклонятся нити, на которых подвешен проводник, если по нему пропустить ток силой  $2 \text{ А}$ ? Массой нитей пренебречь.

## 2.2. Силы, действующие на движущиеся заряды в магнитном поле

### 2.2.1. Закон Ампера

В современной записи в СИ закон Ампера выражается формулой

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}], \quad (2.2.1)$$

где  $d\vec{F}$  – сила, с которой магнитное поле действует на бесконечно малый проводник  $d\vec{l}$  с током  $I$ .

Модуль силы, действующей на проводник,

$$dF = IdlB \sin(\alpha), \quad (2.2.2)$$

Если магнитное поле однородно и проводник перпендикулярен силовым линиям магнитного поля, то

$$F = IlB, \quad (2.2.3)$$

где  $I = qvS$  – ток через проводник сечением  $S$ .

Направление силы  $\vec{F}$  определяется направлением векторного произведения, или правилом левой руки: *ориентируем пальцы по направлению первого вектора, второй вектор должен входить в ладонь и большой палец показывает направление векторного произведения.*

*Закон Ампера – это первое открытие фундаментальных сил, зависящих от скоростей.*

Из закона Ампера хорошо виден физический смысл магнитной индукции.  $B$  – величина, численно равная силе, с которой магнитное поле действует на проводник единичной длины, по которому течет единичный ток:

$$B = \frac{F}{Il}.$$

$$\text{Размерность индукции } [B] = \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}.$$

### 2.2.2. Взаимодействие двух параллельных проводников с током

Пусть  $b$  – расстояние между двумя параллельными, бесконечно длинными проводниками (рис. 2.2.1). Задачу следует решать так: один из проводников с током  $I_2$  создаёт магнитное поле, второй проводник с током  $I_1$  находится в этом поле.

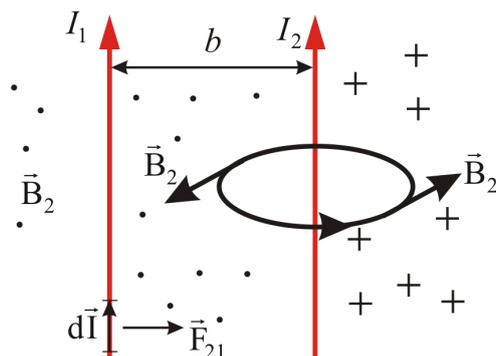


Рис. 2.2.1

Магнитная индукция, создаваемая током  $I_2$  на расстоянии  $b$  от него,

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi b}. \quad (2.2.4)$$

Если проводники  $I_1$  и  $I_2$  лежат в одной плоскости, то угол между  $B_2$  и  $I_1$  прямой, следовательно,  $\sin(\vec{I}_1, \vec{B}_2) = 1$ . Тогда сила, действующая на элемент проводника  $dl$  с током  $I_1$ ,

$$F_{21} = B_2 I_1 dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2 dl}{2\pi b}. \quad (2.2.5)$$

На каждую единицу длины проводника действует сила

$$F_{\text{ед}} = \frac{F_{21}}{dl} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{b} \quad (2.2.6)$$

(разумеется, со стороны первого проводника на второй действует точно такая же сила).

Результирующая сила равна одной из этих сил. Если эти два проводника будут воздействовать на третий, тогда их магнитные поля  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$  нужно сложить векторно.

### 2.2.3. Воздействие магнитного поля на рамку с током

На рис. 2.2.2 показана рамка с током  $I$ , находящаяся в однородном магнитном поле  $\vec{B}$ . Здесь  $\alpha$  – угол между  $\vec{n}$  и  $\vec{B}$  (направление нормали связано с направлением тока «правилом буравчика»).

Сила Ампера, действующая на сторону рамки длиной  $l$ , равна

$$F_1 = IlB; \text{ здесь } (\vec{B} \perp \vec{l}).$$

На другую сторону длиной  $l$  действует такая же сила. Получается «пара сил», или вращающий момент:

$$M = F_1 h = IlBbsin \alpha, \quad (2.2.7)$$

где плечо  $h = b \sin \alpha$ . Так как  $lb = S$  – площадь рамки, тогда можно записать:

$$M = IBS \sin \alpha = P_m B \sin \alpha, \quad (2.2.8)$$

где  $M$  – вращающий момент силы;  $P_m$  – магнитный момент.

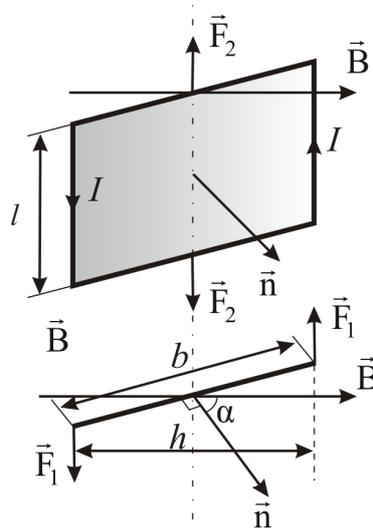


Рис. 2.2.2

Под действием этого вращающего момента рамка повернется так, что  $\vec{n} \parallel \vec{B}$  (рис. 2.2.3).

На стороны длиной  $b$  тоже действует сила Ампера  $F_2$ , растягивая рамку. Так как силы равны по величине и противоположны по направлению, рамка не смещается, в этом случае  $M = 0$  – состояние *устойчивого равновесия*.

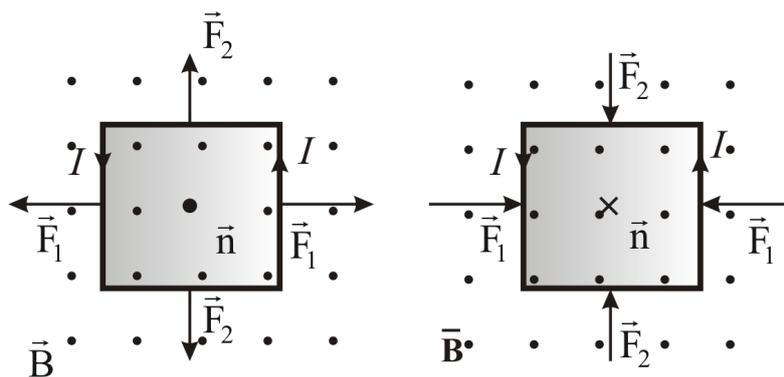


Рис. 2.2.3

Когда  $\vec{n}$  и  $\vec{B}$  антипараллельны, то снова  $M = 0$  (т.к. плечо равно нулю). Это состояние *неустойчивого равновесия*. Рамка сжимается

и, если чуть сместится, сразу возникает вращающий момент, возвращающий рамку в состояние устойчивого равновесия:  $\vec{n} \parallel \vec{B}$ .

В неоднородном поле рамка повернется и будет вытягиваться в область более сильного поля.

### 2.2.4. Единицы измерения магнитных величин

Закон Ампера используется для установления единицы силы тока – ампер.

*Ампер* – сила тока, неизменного по величине, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого сечения, расположенным на расстоянии один метр один от другого в вакууме, вызывает между этими проводниками силу в  $2 \cdot 10^{-7}$  Н/м:

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b}.$$

Здесь  $dl = 1$  м;  $b = 1$  м;  $I_1 = I_2 = 1$  А;  $\frac{dF}{dl} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ .

Определим отсюда размерность и величину  $\mu_0$  в СИ:

$$2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Н}}{\text{м}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2A^2,$$

следовательно,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Н}}{\text{А}^2}$ , или  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$ .

Из закона Био – Савара – Лапласа для прямолинейного проводника с током  $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi b}$  тоже можно найти размерность индукции магнитного поля:

$$[B] = \frac{\text{Н}}{\text{А}^2} \frac{\text{А}}{\text{м}} = \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} = 1 \text{ Тл.}$$

Тесла – единица измерения индукции в СИ.

1 Тл равен магнитной индукции однородного магнитного поля, в котором на плоский контур с током, имеющим магнитный момент  $1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ , действует вращающий момент  $1 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

Другое определение: 1 Тл равен магнитной индукции, при которой магнитный поток сквозь площадку  $1 \text{ м}^2$ , перпендикулярную направлению поля, равен 1 Вб.

Единица измерения магнитного потока Вб получила свое название в честь немецкого физика Вильгельма Вебера (1804–1891) – профессора университетов в Галле, Геттингене, Лейпциге.

Как мы уже говорили, *магнитный поток*  $\Phi$  через поверхность  $S$  – одна из характеристик магнитного поля (рис. 2.2.4):

$$d\Phi_B = B d\vec{S} \cos(\vec{d}\vec{n}, \vec{B}); \quad \Phi = \int_S B_n dS.$$

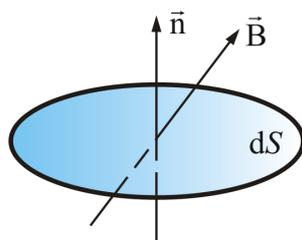


Рис. 2.2.4

Единица измерения магнитного потока в СИ:

$$[\Phi_B] = [B] \cdot [S] = \text{Тл} \cdot \text{м}^2 = \text{Вб}; \quad 1 \text{ Тл} = 1 \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2}.$$

Напряженность магнитного поля  $H$  измеряется в  $\text{А} \cdot \text{м}^{-1}$ .

### 2.2.5. Сила Лоренца

*Электрический ток* – это совокупность большого числа  $n$  движущихся со скоростью  $v$  зарядов. Найдем силу, действующую на один заряд со стороны магнитного поля. По закону Ампера сила, действующая на проводник с током в магнитном поле,

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}], \quad (2.2.9)$$

но ток  $I = jS$ , причем  $j = qnv$ , тогда

$$d\vec{F} = qnvS[d\vec{l}, \vec{B}] = qnSdl[\vec{v}, \vec{B}].$$

Так как  $nSdl$  – число зарядов в объеме  $Sdl$ , тогда *для одного заряда*

$$\frac{d\vec{F}}{nSdl} = q[\vec{v}, \vec{B}],$$

или

$$\vec{F}_Л = q[\vec{v}, \vec{B}]. \quad (2.2.10)$$

*Сила Лоренца* – сила, действующая со стороны магнитного поля на движущийся со скоростью  $\vec{v}$  положительный заряд (здесь  $\vec{v}$  – скорость упорядоченного движения носителей положительного заряда). Модуль силы Лоренца

$$F_Л = qvB \sin \alpha, \quad (2.2.11)$$

где  $\alpha$  – угол между  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ .

Из (2.2.11) видно, что на заряд, движущийся вдоль линии  $\vec{B}$ , не действует сила ( $\sin 0 = 0$ ).

Направлена сила Лоренца перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ . К движущемуся положительному заряду применимо правило левой руки, или «правило буравчика» (рис. 2.2.5).

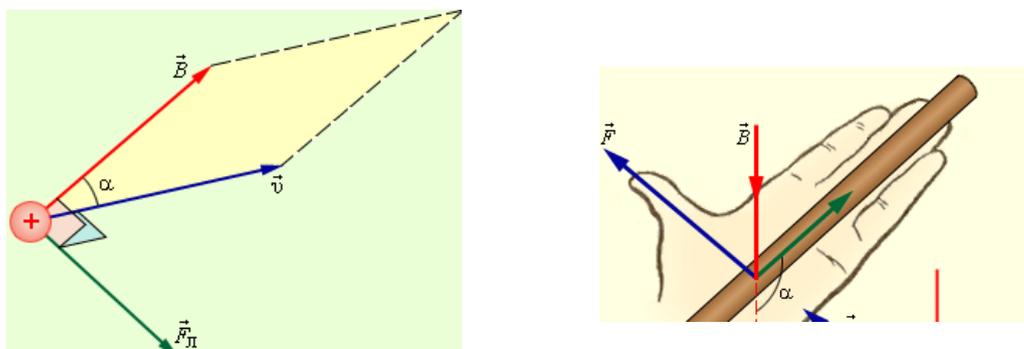


Рис.2.2.5

Направление действия силы для отрицательного заряда – противоположно, следовательно, к электронам применимо правило правой руки.

Так как сила Лоренца направлена перпендикулярно движущемуся заряду, т.е. перпендикулярно  $\vec{v}$ , работа этой силы всегда равна нулю. Следовательно, действуя на заряженную частицу, сила Лоренца не может изменить кинетическую энергию частицы.

Часто лоренцевой силой называют сумму электрических и магнитных сил:

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}], \quad (2.2.12)$$

здесь электрическая сила  $q\vec{E}$  ускоряет частицу, изменяет ее энергию.

### Контрольные вопросы. Упражнения

1. Найдите выражение для силы взаимодействия двух бесконечных прямолинейных одинаковых токов противоположного направления. Начертите рисунок с указанием сил.
2. Назовите единицы магнитной индукции и напряженности магнитного поля. Дайте им определения.
3. Определите числовое значение магнитной постоянной.
4. Почему движущийся заряд по своим магнитным свойствам эквивалентен элементу тока?
5. Чему равна и как направлена сила, действующая на отрицательный электрический заряд, движущийся в магнитном поле?

6. Чему равна работа силы Лоренца при движении протона в магнитном поле? Ответ обосновать.

7. . Проводник массой 10 г и длиной 20 см подвешен в горизонтальном положении в вертикальном магнитном поле с индукцией 0,25 Тл. На какой угол (в градусах) от вертикали отклонятся нити, на которых подвешен проводник, если по нему пропустить ток силой 2 А? Массой нитей пренебречь.

8. . Проводник длиной 110 см согнули под углом  $60^\circ$  так, что одна из сторон угла равна 30 см, и поместили в однородное магнитное поле с индукцией 2 мТл обеими сторонами перпендикулярно линиям индукции. Какая сила (в мН) будет действовать на этот проводник, если по нему пропустить ток силой 10 А?

9. . Прямоугольный контур площадью  $150 \text{ см}^2$  с током силой 4 А, на который действует только однородное магнитное поле с индукцией 0,1 Тл, занял положение устойчивого равновесия. Какую после этого надо совершить работу (в мДж), чтобы медленно повернуть его на  $90^\circ$  вокруг оси, проходящей через середины противоположных сторон?

10. . Прямой проводник длиной 20 см и массой 50 г подвешен горизонтально на двух легких нитях в однородном магнитном поле, вектор индукции которого направлен горизонтально и перпендикулярно к проводнику. Какой ток надо пропустить через проводник, чтобы одна из нитей разорвалась? Индукция поля 50 мТл. Каждая нить разрывается при нагрузке 0,4 Н

11. . Максимальный момент сил, действующих на прямоугольную рамку с током силой 50 А в однородном магнитном поле, равен  $1 \text{ Н}\cdot\text{м}$ . Какова индукция поля, если ширина рамки 0,1 м, а длина 0,2 м?

12. . Проволочная квадратная рамка массой 10 г со стороной 10 см может вращаться вокруг горизонтальной оси, совпадающей с одной из ее сторон. Рамка находится в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией 0,1 Тл. При какой минимальной силе тока в рамке она будет неподвижна и наклонена к горизонту под углом  $45^\circ$ ?

## 2.3. Циркуляция вектора магнитной индукции

### 2.3.1. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции

Связь между током и магнитным полем, образованным этим током, устанавливает эмпирический закон Био – Савара – Лапласа. Еще одной из форм связи является *теорема о циркуляции вектора магнитной индукции*.

Возьмем контур  $l$  (рис. 2.3.1), охватывающий прямой ток  $I$ , и вычислим для него циркуляцию вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ , т.е.  $\oint \vec{B}_l d\vec{l}$ .

Вначале рассмотрим случай, когда контур лежит в плоскости перпендикулярно потоку (ток  $I$  направлен за чертеж). В каждой точке контура вектор  $\vec{B}$  направлен по касательной к окружности, проходящей через эту точку (линии  $\vec{B}$  прямого тока – окружности).

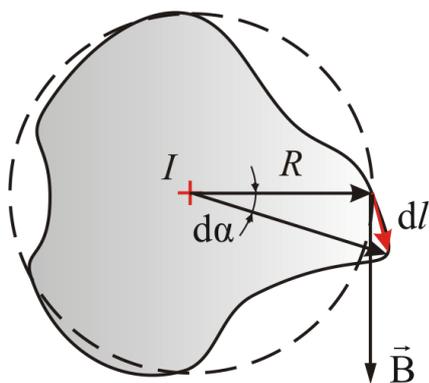


Рис. 2.3.1

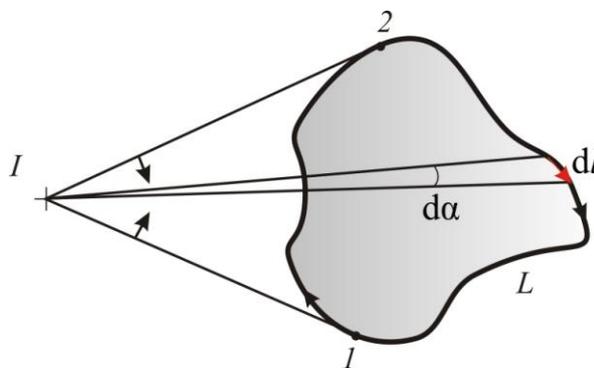


Рис. 2.3.2

Воспользуемся свойствами скалярного произведения векторов.

$B_l dl = B dl_B$ , где  $dl_B$  – проекция  $dl$  на вектор  $\vec{B}$ , но  $dl_B = R d\alpha$ , где  $R$  – расстояние от прямой тока  $I$  до  $dl$ ;

$$B_l dl = B dl_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} R d\alpha = \frac{\mu_0 I d\alpha}{2\pi},$$

отсюда

$$\oint B_l dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha = \mu_0 I \quad (2.3.1)$$

– это *теорема о циркуляции вектора  $\vec{B}$* : циркуляция вектора магнитной индукции равна току, охваченному контуром, умноженному на магнитную постоянную.

Иначе обстоит дело, если ток не охватывается контуром (рис. 2.3.2).

При обходе радиальная прямая поворачивается сначала в одном направлении (1-2), а потом в другом (2-1). Поэтому  $\oint d\alpha = 0$  и, следовательно,

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = 0.$$

Итак,  $\int B_l dl = \mu_0 I$ , где  $I$  – ток, охваченный контуром  $L$ .

Эта формула справедлива и для тока произвольной формы, и для контура произвольной формы.

Если контур охватывает несколько токов, то

$$\oint B_l dl = \mu\mu_0 \sum I_i, \quad (2.3.2)$$

т.е. **циркуляция вектора  $\vec{B}$  равна алгебраической сумме токов, охваченных контуром произвольной формы.**

Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля  $\oint \vec{B}, d\vec{l} = \mu_0 I$  позволяет легко рассчитать величину  $B$  от бесконечного проводника с током (рис. 2.3.3):  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ .

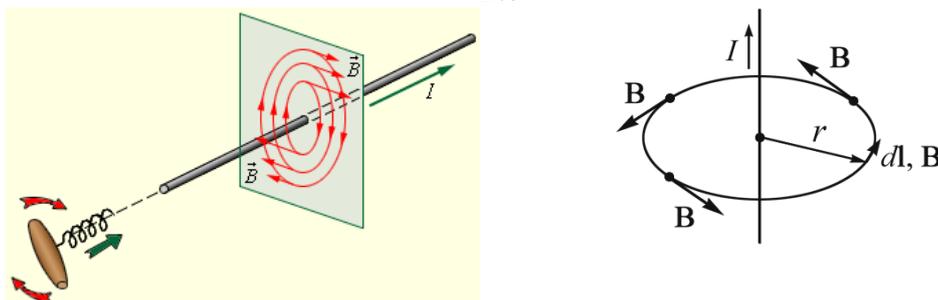


Рис. 2.3.3

Итак, циркуляция вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  отлична от нуля, если контур охватывает ток (сравните с циркуляцией вектора  $\vec{E}$ :  $\oint E_l dl = 0$ ).

Такие поля называются **вихревыми**, или **соленоидальными**.

Магнитному полю нельзя приписывать потенциал, как электрическому полю. Этот потенциал не был бы однозначным: после каждого обхода по контуру он получал бы приращение  $\mu_0 I$ .

Линии напряженности электрического поля начинаются и заканчиваются на зарядах. А магнитных зарядов в природе нет. Опыт показывает, что линии  $\vec{B}$  всегда замкнуты. Поэтому теорема Гаусса для вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  записывается так:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

### 2.3.2. Магнитное поле соленоида

Соленоид является устройством, находящим широкое применение в электрических, электронных и радиоэлектронных цепях. Соленоид обладает рядом замечательных свойств: поле достаточно длинного соленоида сосредоточено практически внутри соленоида и является однородным. Соленоид способен концентрировать энергию магнитного поля.

Применим теорему о циркуляции вектора  $\vec{B}$  ( $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu\mu_0 \sum I_i$ ) для вычисления простейшего магнитного поля – бесконечно длинного соленоида, представляющего собой тонкий провод, намотанный плотно (виток к витку) на цилиндрический каркас (рис. 2.3.4).

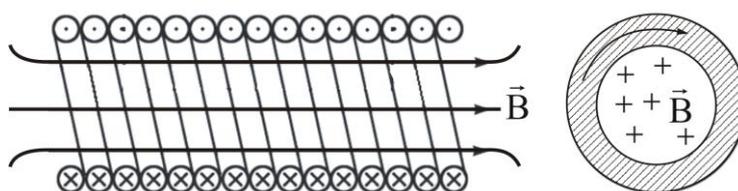


Рис. 2.3.4

*Соленоид можно представить в виде системы одинаковых круговых токов с общей прямой осью.*

Бесконечно длинный соленоид симметричен любой перпендикулярной к его оси плоскости. Взятые попарно (рис. 2.3.5), симметричные относительно такой плоскости витки создают поле, в котором вектор  $\vec{B}$  перпендикулярен плоскости витка, т.е. *линии магнитной индукции имеют направление, параллельное оси соленоида* внутри и вне его.

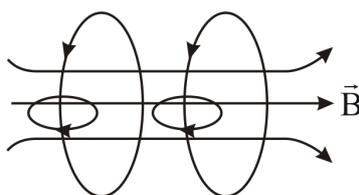


Рис. 2.3.5

Из параллельности вектора  $\vec{B}$  оси соленоида вытекает, что *поле, как внутри, так и вне соленоида, должно быть однородным.*

Возьмём воображаемый прямоугольный контур 1-2-3-4-1 и разместим его в соленоиде, как показано на рис. 2.3.6.

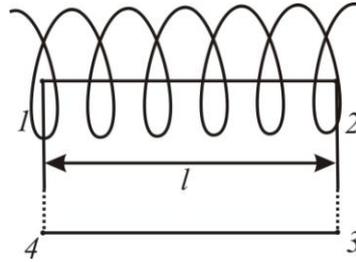


Рис. 2.3.6

По теореме о циркуляции можно записать:

$$\oint_L B_l dl = \int_1^2 B_l dl + \int_2^3 B_l dl + \int_3^4 B_l dl + \int_4^1 B_l dl.$$

Второй и четвёртый интегралы равны нулю, т.к. вектор  $\vec{B}$  перпендикулярен направлению обхода, т.е.  $B_l = 0$ .

Возьмём участок 3-4 на большом расстоянии от соленоида, где поле стремится к нулю, и пренебрежём третьим интегралом, тогда

$$\oint B_l dl = \int_1^2 B_l dl = \mu\mu_0 \sum I_i,$$

где  $B_l = B$  – магнитная индукция на участке 1-2 – внутри соленоида;  $\mu$  – магнитная проницаемость вещества.

Если отрезок 1-2 внутри соленоида, контур охватывает ток:

$$nI = \sum I_i,$$

где  $n$  – число витков на единицу длины;  $I$  – ток в соленоиде (в проводнике).

Тогда магнитная индукция **внутри соленоида**

$$B = \mu\mu_0 nI. \quad (2.3.3)$$

**Вне соленоида**

$$\sum I_i = 0 \quad \text{и} \quad \oint B_l dl = Bl = 0, \quad \text{т.е.} \quad B = 0.$$

Бесконечно длинный соленоид аналогичен плоскому конденсатору: и тут, и там поле однородно и сосредоточено внутри.

Произведение  $nI$  – это *число ампер – витков на метр*.

**У конца полубесконечного соленоида**, на его оси, магнитная индукция равна

$$B = \frac{1}{2} \mu\mu_0 nI. \quad (2.3.4)$$

Практически, если длина соленоида много больше, чем его диаметр, формула (2.3.3) справедлива для точек вблизи середины, формула (2.3.4) – для точек около конца.

Если же катушка короткая, что обычно и бывает на практике, то магнитная индукция в любой точке  $A$ , лежащей на оси соленоида, направлена вдоль оси (по правилу буравчика) и численно равна алгебраической сумме индукций магнитных полей, создаваемых в точке  $A$  всеми витками. В этом случае имеем:

- в точке, лежащей на середине оси соленоида, магнитное поле будет максимальным:

$$B_{\max} = \mu_0 \mu n I \frac{L}{\sqrt{4R^2 + L^2}}, \quad (2.3.5)$$

где  $L$  – длина соленоида;  $R$  – радиус витков;

- в произвольной точке конечного соленоида (рис. 2.3.7) магнитную индукцию можно найти по формуле

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 \mu n I (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (2.3.6)$$

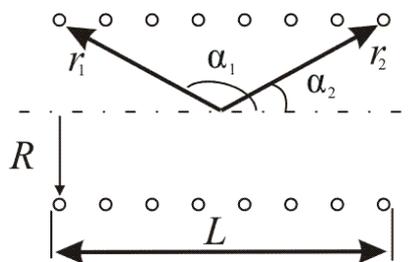


Рис. 2.3.7

На рис. 2.3.8 изображены силовые линии магнитного поля  $\vec{B}$  для некоторых случаев:

- а) для намагниченного металлического стержня;
- б) для соленоида;
- в) для железных опилок, рассыпанных на листе бумаги, над магнитом.

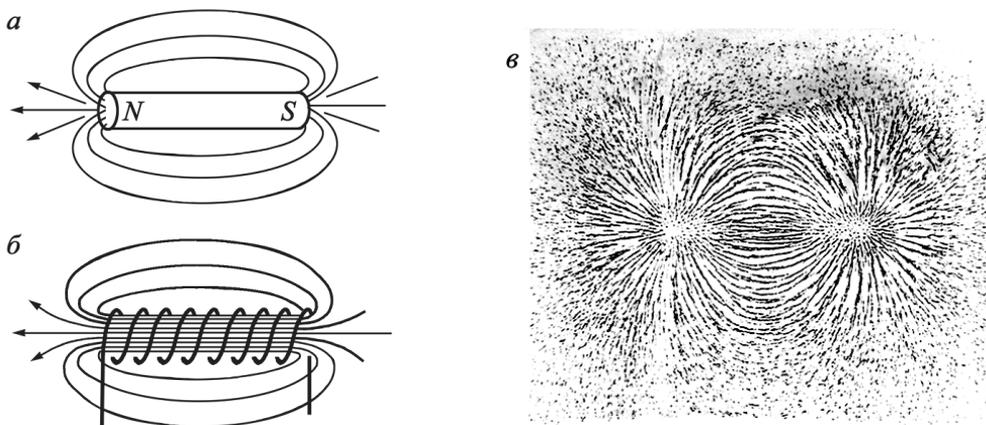


Рис. 2.3.8

### 2.3.3. Магнитное поле тороида

Тороид представляет собой тонкий провод, плотно (виток к витку) намотанный на каркас в форме тора (рис. 2.3.9).

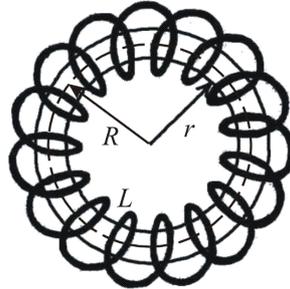


Рис. 2.3.9

Возьмём контур  $L$  в виде окружности радиуса  $r$ , центр которого совпадает с центром тора радиуса  $R$ .

В силу симметрии вектор  $\vec{B}$  в каждом токе направлен по касательной к контуру.

Следовательно,

$$\oint_L B_l dl = B2\pi r = Bl, \quad (2.3.7)$$

где  $l = 2\pi r$  – длина контура.

Если контур проходит внутри тороида, он охватывает ток  $2\pi RnI$  ( $n$  – число витков на единицу длины).

Тогда, в соответствии с теоремой о циркуляции вектора  $\vec{B}$ , можно записать:

$$B = \mu\mu_0 nI \frac{R}{r}. \quad (2.3.8)$$

Контур вне тороида токов не охватывает, поэтому  $B = 0$ .

Для тороида, где радиус тора намного больше радиуса витка, отношение  $R/r \approx 1$ , тогда магнитное поле  $B$  можно рассчитать по формуле (2.3.3):

$$B = \mu\mu_0 nI.$$

*В тороиде магнитное поле однородно только по величине, т.е. по модулю, но направление его в каждой точке различно.*

### 2.3.4. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

Рассмотрим контур с током, образованный неподвижными проводниками и скользящей по ним подвижной перемычкой длиной  $l$  (рис. 2.3.10).

Этот контур находится во внешнем однородном магнитном поле  $\vec{B}$ , перпендикулярном к плоскости контура. При показанном на рисунке направлении тока  $I$  вектор  $\vec{B}$  сонаправлен с  $\vec{n}$ .

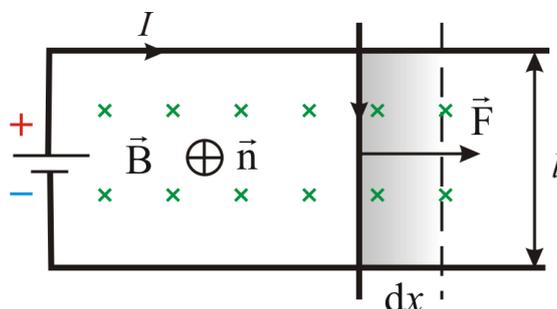


Рис. 2.3.10

На элемент тока  $I$  (подвижный провод) длиной  $l$  действует сила Ампера, направленная вправо:

$$F = IlB.$$

Пусть проводник  $l$  переместится параллельно самому себе на расстояние  $dx$ . При этом совершится работа

$$dA = Fdx = IBldx = IBdS = Id\Phi.$$

Итак,

$$dA = Id\Phi. \quad (2.3.9)$$

**Работа**, совершаемая проводником с током при перемещении, численно равна произведению тока на магнитный поток, пересечённый этим проводником.

Формула остаётся справедливой, если проводник любой формы движется под любым углом к линиям вектора магнитной индукции.

Выведем выражение для работы по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле.

Рассмотрим прямоугольный контур с током  $1-2-3-4-1$  (рис. 2.3.11). Магнитное поле направлено от нас перпендикулярно плоскости контура. Магнитный поток  $\Phi_1$ , пронизывающий контур, направлен по нормали  $\vec{n}$  к контуру, поэтому  $\Phi_1 > 0$ .

Переместим этот контур параллельно самому себе в новое положение  $1'-2'-3'-4'-1'$ . Магнитное поле в общем случае может быть неоднородным, и новый контур будет пронизан магнитным потоком  $\Phi_2$ .

Площадка  $4-3-2'-1'-4$ , расположенная между старым и новым контуром, пронизывается потоком  $\Phi'$ .

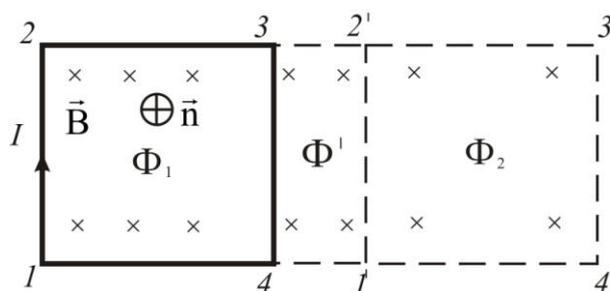


Рис. 2.3.11

Полная работа по перемещению контура в магнитном поле равна алгебраической сумме работ, совершаемых при перемещении каждой из четырех сторон контура:

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41},$$

где  $A_{23}$ ,  $A_{41}$  равны нулю, т.к. эти стороны не пересекают магнитного потока при своём перемещении (очерчивают нулевую площадку);

$$A_{34} = I(\Phi' + \Phi_2).$$

Провод 1-2 перерезает поток  $(\Phi_1 + \Phi')$ , но движется против сил действия магнитного поля:

$$A_{12} = -I(\Phi_1 + \Phi').$$

Тогда общая работа по перемещению контура

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1),$$

или

$$A = I\Delta\Phi, \quad (2.3.10)$$

здесь  $\Phi_2 - \Phi_1 = \Delta\Phi$  – это изменение магнитного потока, сцепленного с контуром.

**Работа**, совершаемая при перемещении замкнутого контура с током в магнитном поле, **равна произведению величины тока на изменение магнитного потока, сцепленного с этим контуром.**

Элементарную работу по бесконечно малому перемещению контура в магнитном поле можно найти по формуле

$$dA = Id\Phi. \quad (2.3.11)$$

Выражения (2.3.9) и (2.2.11) внешне тождественны, но физический смысл величины  $d\Phi$  различен.

Соотношение (2.3.11), выведенное нами для простейшего случая, остаётся справедливым для контура любой формы в произвольном магнитном поле. Более того, если контур неподвижен, а меняется  $\vec{B}$ , то, при изменении магнитного потока в контуре на величину  $d\Phi$ , магнитное поле совершает ту же работу:  $dA = Id\Phi$ .

### 2.3.5. Эффект Холла

Одним из проявлений магнитной составляющей силы Лоренца в веществе служит эффект, обнаруженный в 1879 г. американским физиком Э.Г. Холлом (1855–1938). Эффект состоит в возникновении на боковых гранях проводника с током, помещенного в поперечное магнитное поле, разности потенциалов, пропорциональной величине тока  $I$  и индукции магнитного поля  $B$ .

Рассмотрим эффект, обусловленный действием лоренцевой силы  $\vec{f}$  на свободные заряды в проводнике. Представим себе проводник с током  $I$  в виде плоской ленты, расположенной в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ , направленной от нас (рис. 2.3.12).

В случае, изображенном на рис. 2.3.12, *а*, верхняя часть проводника будет заряжаться отрицательно, в случае 2.3.12, *б* – положительно.

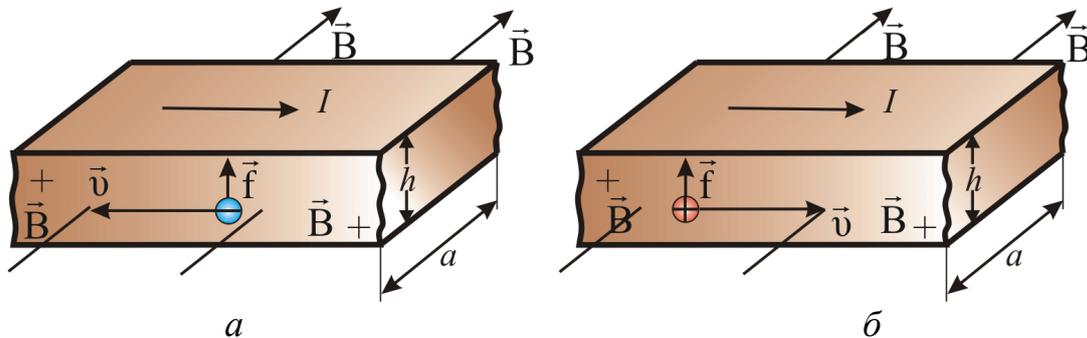


Рис. 2.3.12

Это позволяет экспериментально определить знак носителя заряда в проводнике.

При равной концентрации носителей заряда обоих знаков возникает **холловская разность потенциалов**, если различна подвижность, т.е. дрейфовая скорость носителей заряда.

Подсчитаем величину холловской разности потенциалов ( $U_X$ ).

Пусть  $E_X$  – напряженность электрического поля, обусловленного ЭДС Холла;  $h$  – толщина ленты проводника;

$$U_X = E_X h. \quad (2.3.12)$$

Перераспределение зарядов прекратится, когда сила  $qE_X$  уравновесит лоренцеву силу, т.е.

$$qE_X = qvB, \quad \text{или} \quad E_X = Bv.$$

Плотность тока  $j = mvq$ , отсюда  $v = \frac{j}{mq}$ . Тогда  $E_X = B \frac{j}{mq}$ .

Подставим  $E_X$  в (2.10.1) и найдем  $U_X$ :

$$U_X = \frac{jBh}{nq}, \quad \text{или} \quad U_X = \frac{BhI}{nqS} = \frac{BI}{qna} = \frac{RBI}{a}, \quad (2.3.13)$$

где  $R = 1/qn$  – коэффициент Холла.

Исследования ЭДС Холла привели к удивительным выводам. Металлы могут обладать проводимостью  $p$ -типа (Zn, Cd – у них дырки более подвижные, чем электроны). Это металлы с чуть перекрывающимися знаками, т.е. полуметаллы.

Из формулы (2.3.13) можно найти число носителей заряда:

$$n = \frac{IB}{qaU_X}. \quad (2.3.14)$$

Итак, измерение холловской разности потенциалов позволяет определить:

- знак заряда и тип носителей;
- количество носителей.

### Контрольные вопросы. Упражнения

1. В чем заключается теорема о циркуляции вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ ?
2. Применив теорему о циркуляции вектора  $\vec{B}$ , рассчитайте магнитное поле прямого тока.
3. Применив теорему о циркуляции вектора  $\vec{B}$  вычислите простейшие магнитные поля:
  - бесконечно длинного соленоида;
  - у конца полубесконечного соленоида;
  - в произвольной точке конечного соленоида.
4. Как рассчитать магнитное поле тороида?
5. Чем отличается работа при перемещении проводника с током, от работы при перемещении контура с током в магнитном поле.
6. В чем заключается эффект Холла? Выведите формулу для холловской разности потенциалов.
7. Какие правила необходимо использовать, для пояснения эффекта Холла (рис. 2.3.12).
8. Какие данные о проводниках и полупроводниках можно получить на основе экспериментального исследования эффекта Холла?
9. Используя «правило левой руки» объясните, как будет заряжаться верхняя грань пластины с током на рис. 2.3.12.

## 2.4. Явление электромагнитной индукции

### 2.4.1. опыты Фарадея. Индукционный ток. Правило Ленца

С момента открытия связи магнитного поля с током (что является подтверждением симметрии законов природы) делались многочисленные попытки получить *ток с помощью магнитного поля*. Задача была решена Майклом Фарадеем в 1831 г. (Американец Джозеф Генри тоже открыл, но не успел опубликовать свои результаты. Ампер также претендовал на открытие, но не смог представить свои результаты).

Из школьного курса физики опыты Фарадея хорошо известны (рис. 2.4.1 – 2.4.3).

Если подносить постоянный магнит к катушке или наоборот (рис. 2.4.1), то в катушке возникнет электрический ток. То же самое происходит с двумя близко расположенными катушками: если к одной из катушек подключить источник переменного тока, то в другой также возникнет переменный ток (рис. 2.4.2), но лучше всего этот эффект проявляется, если две катушки соединить сердечником (рис. 2.4.3).

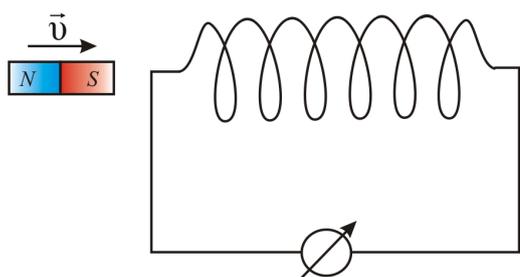


Рис. 2.4.1

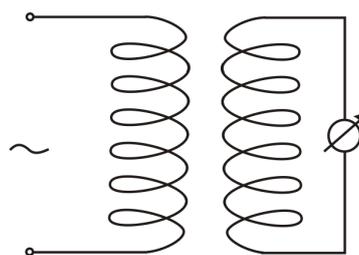


Рис. 2.4.2

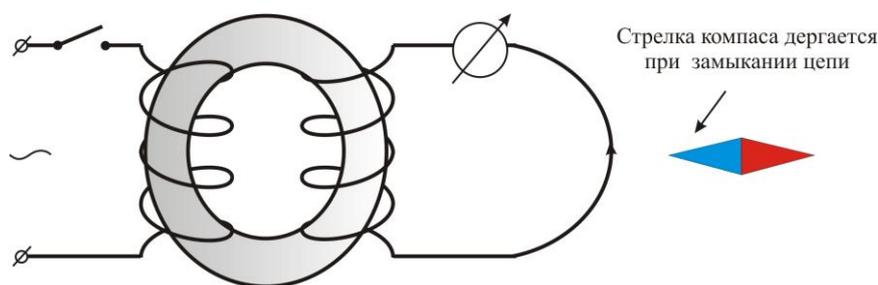


Рис. 2.4.3

По определению Фарадея общим для этих опытов является следующее: *если поток вектора индукции, пронизывающий замкнутый, проводящий контур, меняется, то в контуре возникает электрический ток.*

Это явление называют **явлением электромагнитной индукции**, а ток – **индукционным**. При этом явление совершенно не зависит от способа изменения потока вектора магнитной индукции.

Итак, получается, что **движущиеся заряды (ток) создают магнитное поле, а движущееся магнитное поле создает (вихревое) электрическое поле и собственно индукционный ток**.

Для каждого конкретного случая Фарадей указывал направление индукционного тока.

В 1833 г. русский физик Э.Х. Ленц установил общее **правило нахождения направления тока**: индукционный ток всегда направлен так, что магнитное поле этого тока препятствует изменению магнитного потока, вызывающего индукционный ток. Это утверждение носит название **правило Ленца**.

Заполнение всего пространства однородным магнетиком приводит, при прочих равных условиях, к увеличению индукции в  $\mu$  раз. Этот факт подтверждает то, что индукционный ток обусловлен изменением потока вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ , а не потока вектора напряженности  $\vec{H}$ .

#### 2.4.2. Величина ЭДС индукции

Для создания тока в цепи необходимо наличие электродвижущей силы. Поэтому явление электромагнитной индукции свидетельствует о том, что при изменении магнитного потока в контуре возникает электродвижущая сила индукции  $\mathcal{E}_i$ . Наша задача, используя законы сохранения энергии, найти величину  $\mathcal{E}_i$  и выяснить ее природу.

Рассмотрим перемещение подвижного участка 1-2 контура с током в магнитном поле  $\vec{B}$  (рис. 2.4.4).

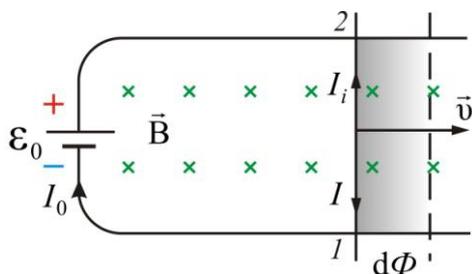


Рис. 2.4.4

Пусть сначала магнитное поле  $\vec{B}$  отсутствует. Батарея с ЭДС, равной  $\mathcal{E}_0$ , создает ток  $I_0$ . За время  $dt$  батарея совершает работу

$$dA = \varepsilon_0 I_0 dt. \quad (2.4.1)$$

Эта работа будет переходить в тепло, которое можно найти по закону Джоуля – Ленца:

$$Q = dA = \varepsilon_0 I_0 dt = I_0^2 R dt,$$

здесь  $I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R}$ ,  $R$  – полное сопротивление всего контура.

Поместим контур в однородное магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ . Линии  $\vec{B} \parallel \vec{n}$  и связаны с направлением тока «правилом буравчика». Поток  $\Phi$ , сцепленный с контуром, – положителен.

Каждый элемент контура испытывает механическую силу  $d\vec{F}$ . Подвижная сторона рамки будет испытывать силу  $\vec{F}_0$ . Под действием этой силы участок 1-2 будет перемещаться со скоростью  $v = dx/dt$ . При этом изменится и поток магнитной индукции. Тогда в результате электромагнитной индукции ток в контуре изменится и станет равным  $I = I_0 - I_i$ .

Изменится и сила  $\vec{F}_0$ , которая теперь станет равной результирующей силе  $\vec{F}$ . Эта сила за время  $dt$  произведет работу  $dA$ :

$$dA = F dx = I d\Phi.$$

Как и в случае, когда все элементы рамки неподвижны, источником работы является  $\varepsilon_0$ .

При неподвижном контуре эта работа сводилась только лишь к выделению тепла. В нашем случае тепло тоже будет выделяться, но уже в другом количестве, т.к. ток изменился. Кроме того, совершается механическая работа. Общая работа за время  $dt$  равна

$$\varepsilon_0 I dt = I^2 R dt + I d\Phi. \quad (2.4.2)$$

Умножим левую и правую часть выражения (2.4.2) на  $\frac{1}{IR dt}$ , получим

$$\frac{\varepsilon_0}{R} = I + \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Отсюда

$$I = \frac{\varepsilon_0 - \frac{d\Phi}{dt}}{R}. \quad (2.4.3)$$

Полученное выражение (2.4.3) мы вправе рассматривать **как закон Ома для контура**, в котором, кроме источника  $\varepsilon_0$ , действует

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (2.4.4)$$

ЭДС индукции контура  $\mathcal{E}_i$  равна скорости изменения потока магнитной индукции, пронизывающей этот контур.

Это выражение (2.4.4) для ЭДС индукции контура является универсальным, не зависящим от способа изменения потока магнитной индукции, и носит название **закон Фарадея**.

Знак минус в выражении отражает **правило Ленца** о направлении индукционного тока: **индукционный ток всегда направлен так, чтобы своим полем противодействовать изменению начального магнитного поля**.

Направление индукционного тока и направление  $\frac{d\Phi}{dt}$  связаны «правилом буравчика» (рис. 2.4.5).

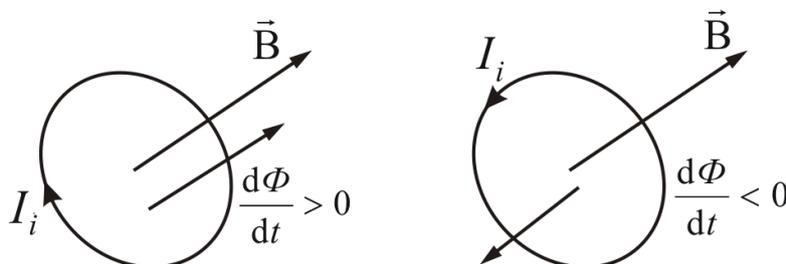


Рис. 2.4.5

$$\text{Размерность ЭДС индукции} - [\mathcal{E}_i] = \frac{[\Phi]}{[t]} = \frac{B \cdot c}{c} = B.$$

Если контур состоит из нескольких витков, то надо пользоваться понятием **потокосцепление** (полный магнитный поток):

$$\Psi = \Phi N,$$

где  $N$  – число витков.

Итак, если

$$\mathcal{E}_i = - \sum_{i=1}^N \frac{d\Phi_i}{dt} = - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \Phi_i,$$

$$\sum \Phi_i = \Psi.$$

Тогда **закон Фарадея** можно записать в следующем виде:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Psi}{dt}. \quad (2.4.5)$$

### 2.4.3. Природа ЭДС индукции

Ответим на вопрос: что является причиной движения зарядов, причиной возникновения индукционного тока? Рассмотрим рис. 2.4.6.

Проводник с током, изогнутый как показано на рисунке, замкнут подвижным проводником.

- Если перемещать проводник в однородном магнитном поле  $\vec{B}$ , то под действием силы Лоренца электроны будут отклоняться вниз, а положительные заряды – вверх; возникает разность потенциалов. Это и будет  $\mathcal{E}_i$  – *сторонняя сила*, под действием которой течет ток.

Для положительных зарядов  $\vec{F}_L = q^+[\vec{B}, \vec{v}]$ , для электронов  $\vec{F}_L = -e[\vec{B}, \vec{v}]$ .

- Если проводник неподвижен, а изменяется магнитное поле, какая сила возбуждает индукционный ток в этом случае?

Если взять обыкновенный трансформатор, то, как только замыкается цепь первичной обмотки, во вторичной обмотке сразу возникает ток. При этом сила Лоренца не участвует, т.к. она действует на движущиеся заряды.

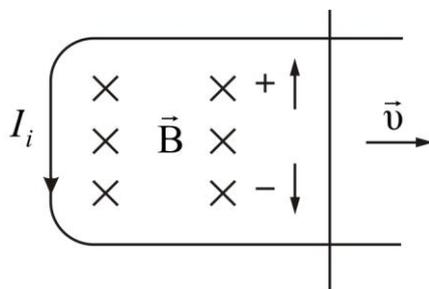


Рис. 2.4.6

Ответ был дан Дж. Максвеллом в 1860 г.: **всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве переменное электрическое поле  $E'$** . Оно и является причиной возникновения индукционного тока в проводнике. То есть  $E'$  возникает только при наличии переменного магнитного поля (на постоянном токе трансформатор не работает).

Сущность явления электромагнитной индукции совсем не в появлении индукционного тока (ток появляется тогда, когда есть заряды и замкнута цепь), а в возникновении вихревого электрического поля (не только в проводнике, но и в окружающем пространстве, в вакууме).

Это поле имеет совершенно иную структуру, нежели поле, создаваемое зарядами. Так как оно не создается зарядами, то силовые линии не могут начинаться и заканчиваться на зарядах, как это было у нас в электростатике. Это поле вихревое, силовые линии его замкнуты.

Так как это поле перемещает заряды, оно обладает силой.

Введем вектор напряженности вихревого электрического поля  $\vec{E}'$ . Сила, с которой это поле действует на заряд,

$$\vec{F}' = q\vec{E}'.$$

Но когда заряд движется в магнитном поле, на него действует сила Лоренца

$$\vec{F}_L' = q[\vec{v}, \vec{B}].$$

Эти силы должны быть равны:  $q\vec{E}' = q[\vec{v}, \vec{B}]$ , отсюда

$$\vec{E}' = [\vec{v}, \vec{B}], \quad (2.4.6)$$

здесь  $\vec{v}$  – скорость движения заряда  $q$  относительно  $\vec{B}$ . Но для явления электромагнитной индукции важна скорость изменения магнитного поля  $\vec{B}$ . Поэтому можно записать:

$$\vec{E}' = -[\vec{v}_B, \vec{B}], \quad (2.4.7)$$

где  $\vec{v}_B$  – скорость движения магнитного поля относительно заряда.

ЭДС индукции  $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$ . Если площадь  $S$ , которую пронизывает магнитный поток, величина постоянная ( $S = \text{const}$ ), то можно записать:

$$\mathcal{E}_i = -S \frac{dB}{dt},$$

т.е. ЭДС индукции  $\mathcal{E}_i$  пропорциональна скорости изменения магнитного поля  $\frac{dB}{dt}$ .

#### 2.4.4. Циркуляция вектора напряженности вихревого электрического поля

Чему равна циркуляция вектора вихревого электрического поля  $\vec{E}'$  в случае, изображенном на рис. 2.4.7?



Рис. 2.4.7

Работу вихревого электрического поля по перемещению заряда вдоль замкнутого контура  $L$  можно подсчитать по формуле

$$dA = q \oint_L \vec{E}' d\vec{l}. \quad (2.4.8)$$

С другой стороны, работа по перемещению единичного заряда вдоль замкнутой цепи равна ЭДС, действующей в этой цепи:

$$dA = \varepsilon_i q. \quad (2.4.9)$$

Из сравнения (2.4.8) и (2.4.9) можно сделать заключение, что циркуляция вектора электрического поля равна

$$\oint_L \vec{E}' d\vec{l} = \varepsilon_i. \quad (2.4.10)$$

Так как никаких других сторонних сил в цепи, где течет индукционный ток, нет, то можно записать:

$$\oint_L \vec{E}' d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (2.4.11)$$

Эти выражения для циркуляции справедливы всегда, независимо от того, выполнен контур в виде линейного проводника, диэлектрика или речь идет о контуре (мысленном) в вакууме.

При движении заряда в проводнике из-за сопротивления устанавливается динамическое равновесие.

Если контур выполнен из диэлектрика, то каждый элемент его поляризуется в соответствии с действующим электрическим полем  $\vec{E}'$ .

Если заряд  $q$  движется в вакууме по контуру, то при каждом обходе контура механическая энергия его возрастает на величину

$$\frac{mv^2}{2} = \oint_L q \vec{E}' d\vec{l} = q \varepsilon_i. \quad (2.4.12)$$

На использовании этого факта основан оригинальный ускоритель электронов – *бетатрон*.

### 2.4.5. Токи Фуко (вихревые токи)

До сих пор мы рассматривали индукционные токи в линейных проводниках. Но индукционные токи будут возникать и в толще сплошных проводников при изменении в них потока вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ . Они будут циркулировать в веществе проводника (напомним, что линии  $\vec{E}'$  – замкнуты). Так как электрическое поле вихревое, то и токи называются вихревыми токами, или *токами Фуко*.

Если медную пластину отклонить от положения равновесия и отпустить так, чтобы она вошла со скоростью  $v$  в пространство между по-

лосами магнита, то пластина практически остановится в момент ее вхождения в магнитное поле (рис. 2.4.8).

Замедление движения связано с возбуждением в пластине вихревых токов, препятствующих изменению потока вектора магнитной индукции. Поскольку пластина обладает конечным сопротивлением, токи индукции постепенно затухают и пластина медленно двигается в магнитном поле. Если электромагнит отключить, то медная пластина будет совершать обычные колебания, характерные для маятника.

Сила и расположение вихревых токов очень чувствительны к форме пластины. Если заменить сплошную медную пластину «гребенкой» – медной пластиной с пропилами, то вихревые токи в каждой части пластины возбуждаются меньшими потоками. Индукционные токи уменьшаются, уменьшается и торможение (рис. 2.4.9). Маятник в виде гребенки колеблется в магнитном поле почти без сопротивления. Этим опытом объясняется, почему сердечники электромагнитов, трансформаторов делают не из сплошного куска железа, а набранными из тонких пластин, изолированных друг от друга. В результате уменьшаются токи Фуко и выделяемое ими тепло.

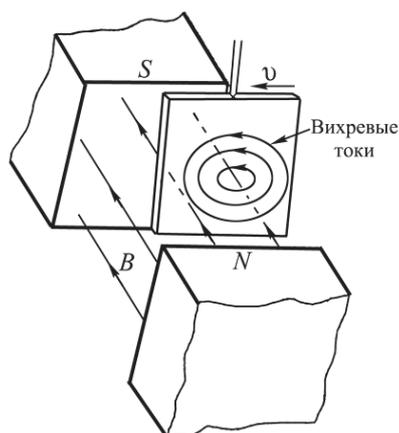


Рис. 2.4.8

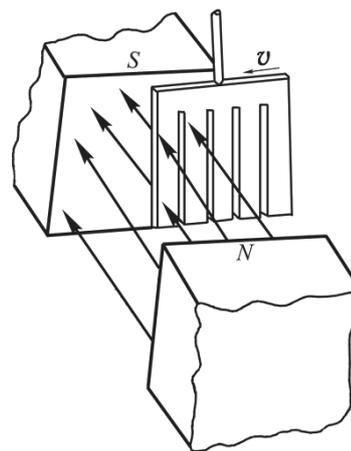


Рис. 2.4.9

Если взять медный диск диаметром  $\approx 5$  см и толщиной  $\approx 5$  мм и уронить его между полюсами электромагнита, то при выключенном магните диск падает с обычным ускорением. При включении магнитного поля  $\approx 1$  Тл падение диска резко замедляется и его движение напоминает падение тела в очень вязкой среде.

Тормозящее действие тока Фуко используется для создания магнитных успокоителей – демпферов. Если под качающейся в горизонтальной плоскости магнитной стрелкой расположить массивную медную пластину, то возбуждаемые в медной пластине токи Фуко будут

тормозить колебание стрелки. Магнитные успокоители такого рода используются в сейсмографах, гальванометрах и других приборах.

Токи Фуко применяются в электрометаллургии для плавки металлов (рис. 2.4.10). Металл помещают в переменное магнитное поле, создаваемое током частотой 500–2000 Гц. В результате индуктивного разогрева металл плавится, а тигль, в котором он находится, при этом остается холодным. Например, при подведенной мощности 600 кВт тонна металла плавится за 40–50 минут.

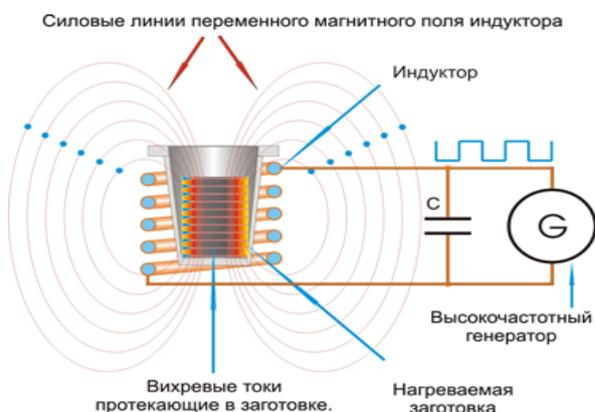


Рис. 2.4.10

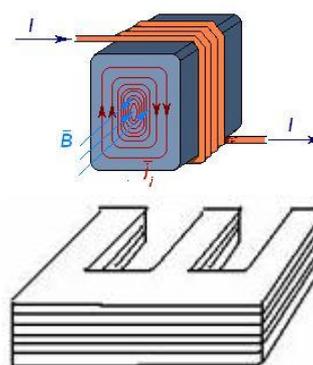


Рис. 2.4.11

Вредное действие токов Фуко проявляется в разогреве сердечников трансформаторов (рис. 2.4.11). Чтобы избежать этого, приходится изготавливать сердечники не сплошные, а из пластин.

### 2.4.6. Скин-эффект

Если быстропеременный высокочастотный ток протекает по проводнику, то вихревые токи, индуцируемые в проводнике, препятствуют равномерному распределению плотности тока по поперечному сечению проводника – плотность тока на оси провода оказывается меньше, чем у его поверхности. Ток как бы вытесняется на поверхность провода, при этом вихревые токи по оси проводника текут против направления основного тока, а на поверхности – в том же направлении (рис. 2.4.10). Это явление называется скин-эффектом (от англ. *skin* – кожа, оболочка). Впервые это явление описано в 1885–1886 гг. английским физиком О. Хевисайдом, а обнаружено на опыте его соотечественником Д. Юзом в 1886 г.

При нарастании тока в проводе ЭДС индукции направлена против тока. Электрическое поле самоиндукции максимально на оси провода, что приводит к неравномерному распределению плотности тока. Плот-

ность тока убывает от поверхности к оси провода примерно по экспоненциальному закону (рис. 2.4.13).

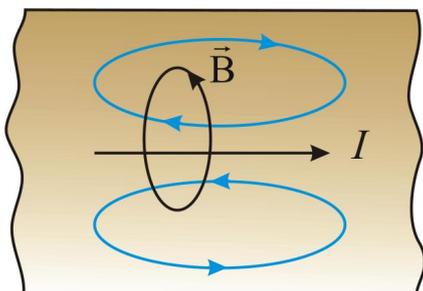


Рис. 2.4.12

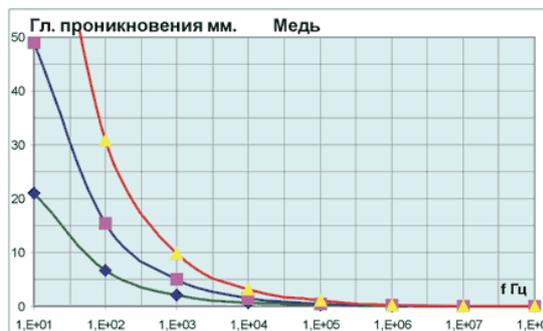


Рис. 2.4.13

При частоте  $\nu = 50$  Гц  $r_0 = 10$  мм – ток практически равномерно распределен по объему проводов, исключая очень толстые кабели. Но при высокочастотных колебаниях ( $\nu \approx 100$  МГц =  $10^8$  Гц) глубина проникновения  $r_0 \approx 7 \cdot 10^{-3}$  мм и ток почти целиком течет по поверхности провода. По этой причине с целью уменьшения потерь поверхность высокочастотных контуров серебруют. Провода для переменных токов высокой частоты, учитывая скин-эффект, сплетают из большого числа тонких проводящих нитей, изолированных друг от друга эмалевым покрытием – *литцендратом* (рис. 2.4.14).

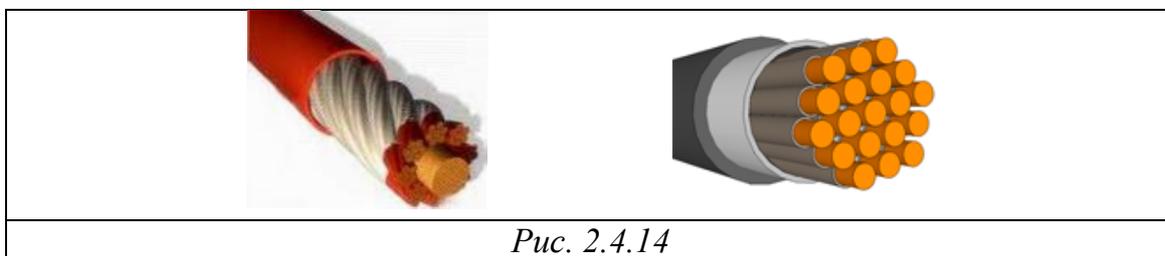


Рис. 2.4.14

ВЧ-токи используются для закалки поверхностей деталей: поверхностный слой разогревается быстро в ВЧ-поле, закаливается и становится прочным, но не хрупким, т.к. внутренняя часть детали не разогревалась и не закаливалась.

### Контрольные вопросы. Упражнения

1. Что является причиной возникновения ЭДС индукции в замкнутом проводящем контуре? От чего и как зависит ЭДС индукции, возникающая в контуре?
2. В чем заключается явление электромагнитной индукции? Проанализируйте опыты Фарадея.
3. Почему для обнаружения индукционного тока лучше использовать замкнутый проводник в виде катушки, а не в виде одного витка провода?
4. Сформулируйте правило Ленца, проиллюстрировав его примерами.
5. Как направлен индукционный ток?
6. Всегда ли при изменении магнитной индукции в проводящем контуре в нем возникает ЭДС индукции? индукционный ток?
7. Возникает ли индукционный ток в проводящей рамке, поступательно движущейся в однородном магнитном поле?
8. Покажите, что закон Фарадея есть следствие закона сохранения энергии.
9. Какова природа ЭДС электромагнитной индукции?
10. Выведите выражение для ЭДС индукции в плоской рамке, равномерно вращающейся в однородном магнитном поле. За счет чего ее можно увеличить?
11. Что такое вихревые токи? Вредны они или полезны?
12. Почему сердечники трансформаторов не делают сплошными?
13. Когда ЭДС самоиндукции больше – при замыкании или размыкании цепи постоянного тока?
14. В чем заключается физический смысл индуктивности контура? взаимной индуктивности двух контуров? От чего они зависят?
15. В чем заключаются явления самоиндукции и взаимной индукции? Вычислите ЭДС индукции для обоих случаев.
16. В чем заключается физический смысл времени релаксации  $\tau = L/R$ ? Докажите, что  $\tau$  имеет размерность времени.
17. Запишите и проанализируйте выражения для объемной плотности энергии электростатического и магнитного полей. Чему равна объемная плотность энергии электромагнитного поля?
18. Что представляют собой вихревые токи (токи Фуко)? Какое применение они находят? Как можно с ними бороться?
19. Между полюсами сильного электромагнита сначала качается массивный маятник (рис. 2.4.8), затем – маятник с большим числом разрезов (рис. 2.4.9). Поясните поведение маятников при разомкнутой и замкнутой обмотках электромагнита.

## 2.5. Ускорители заряженных частиц

### 2.5.1. Классификация ускорителей

*Ускорителями* заряженных частиц называются устройства, в которых под действием электрических и магнитных полей создаются и управляются пучки высокоэнергетичных заряженных частиц (электронов, протонов, мезонов и т.д.). Ускорители являются основным инструментом исследований в физике элементарных частиц.

Любой ускоритель характеризуется типом ускоряемых частиц, разбросом частиц по энергиям и интенсивностью пучка. Ускорители подразделяются на *непрерывные* (равномерный во времени пучок) и *импульсные* (в них частицы ускоряются порциями – импульсами). Последние характеризуются длительностью импульса.

По форме траектории и механизму ускорения частиц ускорители делятся на *линейные*, *циклические* и *индукционные*. В линейных ускорителях траектории движения частиц близки к прямым линиям, в циклических и индукционных траекториями частиц являются окружности или спирали.

Рассмотрим некоторые типы ускорителей заряженных частиц.

### 2.5.2. Линейные ускорители

1. *Линейный ускоритель*. Ускорение частиц осуществляется электростатическим полем, создаваемым, высоковольтным генератором (рис. 2.5.1). Заряженная частица проходит поле однократно: заряд  $q$ , проходя разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$ , приобретает кинетическую энергию  $K = q(\varphi_1 - \varphi_2)$ . Таким способом частицы ускоряются до  $\approx 10$  МэВ. Их дальнейшее ускорение с помощью источников постоянного напряжения невозможно из-за утечки зарядов, пробоев и т.д.

2. *Линейный резонансный ускоритель*. Ускорение заряженных частиц осуществляется переменным электрическим полем сверхвысокой частоты, синхронно изменяющимся с движением частиц. Таким способом протоны ускоряются до энергий порядка десятков мегаэлектронвольт, электроны – до десятков гигаэлектронвольт.

Общий вид линейного ускорителя на бегущей волне приведен на рис. 2.5.2. Заряженные частицы многократно проходят ускоряющий промежуток в двух резонаторах, изображенных на рисунке.

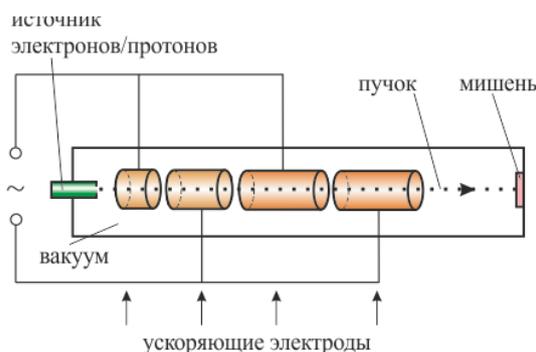


Рис. 2.5.1



Рис. 2.5.2

### 2.5.3. Циклические ускорители

1. **Циклотрон** – циклический резонансный ускоритель тяжелых частиц (протонов, ионов). Принципиальная схема циклотрона и его внешний вид приведены на рис. 2.5.3.

Между полюсами сильного электромагнита помещается вакуумная камера, в которой находятся два электрода в виде полых металлических полуцилиндров, или дуантов 3. К дуантам приложено переменное электрическое поле 5. Магнитное поле, создаваемое электромагнитом, однородно и перпендикулярно плоскости дуантов.

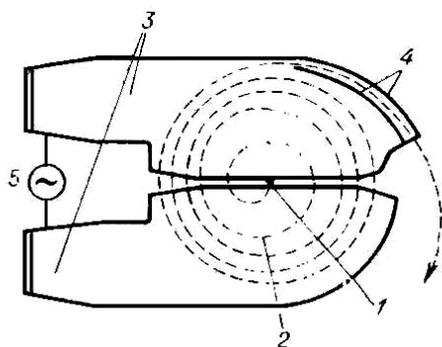


Рис. 2.5.3

Если заряженную частицу ввести в центр зазора 1 между дуантами, то она, ускоряемая электрическим и отклоняемая магнитными полями, войдет в дуант и опишет полуокружность, радиус которой пропорционален скорости частицы. К моменту ее выхода из первого дуанта полярность напряжения изменяется (при соответствующем подборе изменения напряжения между дуантами), поэтому частица вновь ускоряется и, переходя во второй дуант, описывает там полуокружность уже большего радиуса 2 и т.д.

Для непрерывного ускорения частицы в циклотроне необходимо выполнять условие синхронизма (условие «резонанса») – периоды вра-

щения частицы в магнитном поле и колебаний электрического поля должны быть равны. При выполнении этого условия частица будет двигаться по раскручивающейся спирали, получая при каждом прохождении через зазор дополнительную энергию. На последнем витке, когда энергия частиц и радиус орбиты доведены до максимально допустимых значений, пучок частиц посредством отклоняющего электрического поля выводится из циклотрона 4.

В циклотронах заряженная частица с зарядом  $q$  и массой  $m$  ускоряется до скоростей, при которых релятивистский эффект увеличения массы частицы практически не проявляется. Период обращения частицы

$$T = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Радиус траектории частицы

$$R = \frac{mv}{qB}.$$

Циклотроны позволяют ускорять протоны до энергий примерно 20 МэВ. Дальнейшее их ускорение в циклотроне *ограничивается релятивистским возрастанием массы со скоростью*, что приводит к увеличению периода обращения (он пропорционален массе), и синхронизм нарушается. Поэтому циклотрон совершенно неприменим для ускорения электронов (при  $E = 0,5$  МэВ  $m = 2m_0$ , при  $E = 10$  МэВ  $m = 28m_0$ ).

Ускорение релятивистских частиц в циклических ускорителях можно, однако, осуществить, если применять предложенный в 1944 г. советским физиком В.И. Векслером (1907–1966) и в 1945 г. американским физиком Э. Мак-Милланом (1907–1991) **принцип автофазировки**. Его идея заключается в том, что для компенсации увеличения периода вращения частиц, ведущего к нарушению синхронизма, изменяют либо частоту ускоряющего электрического, либо индукцию магнитного поля, либо то и другое. Принцип автофазировки используется в фазотроне, синхротроне и синхрофазотроне.

2. **Микротрон** (электронный циклотрон) – циклический резонансный ускоритель, в котором, как и в циклотроне, и магнитное поле, и частота ускоряющего поля постоянны во времени, но резонансное условие в процессе ускорения всё же сохраняется за счёт изменения кратности ускорения  $q$ . Частица вращается в микротроне, в однородном магнитном поле, многократно проходя ускоряющий резонатор. В резонаторе она получает такой прирост энергии, что её период обращения изменяется на величину, равную или кратную периоду ускоряющего напряжения. Причем, если частица с самого начала вошла в резонанс с ускоряющим полем, этот резонанс сохраняется, несмотря на изменение периода обращения. В микро-

троне действует механизм автофазировки, так что частицы, близкие к равновесной орбите, также будут ускоряться.

Микротрон – ускоритель непрерывного действия, способен давать токи порядка 100 мА, максимальная достигнутая энергия – порядка 30 МэВ (Россия, Великобритания). Реализация больших энергий затруднительна из-за повышенных требований к точности магнитного поля, а существенное повышение тока ограничено электромагнитным излучением ускоряемых электронов.

Для длительного сохранения резонанса магнитное поле микротрона должно быть однородным. Такое поле не обладает фокусирующими свойствами по вертикали; соответствующая фокусировка производится электрическим полем резонатора. Предлагались варианты микротронов с меняющимся по азимуту магнитным полем (секторный микротрон), но сколько-нибудь значительного развития они пока не получили.

3. **Фазотрон** (синхроциклотрон) – циклический резонансный ускоритель тяжелых заряженных частиц (например: протонов, ионов,  $\alpha$ -частиц), в котором управляющее магнитное поле постоянно, а частота ускоряющего электрического поля медленно изменяется с периодом. Движение частиц в фазотроне, как и в циклотроне, происходит по раскручивающейся спирали. Частицы в фазотроне ускоряются до энергий, примерно равных 1 ГэВ (ограничения здесь определяются размерами фазотрона, т. к. с ростом скорости частиц растет радиус их орбиты).

4. **Синхротрон** – циклический резонансный ускоритель ультрарелятивистских электронов, в котором управляющее магнитное поле изменяется во времени, а частота ускоряющего электрического поля постоянна. На рис. 2.5.4 схематически изображен синхротрон: 1 – инжектор электронов; 2 – поворотный магнит; 3 – пучок электронов; 4 – управляющий электромагнит; 5 – вакуумная тороидальная камера; 6 – ускоряющий промежуток.

Внешний вид Томского синхротрона на 1,5 ГэВ представлен на рис. 2.5.5. Электроны в разных синхротронах ускоряются до энергий 5–10 ГэВ.

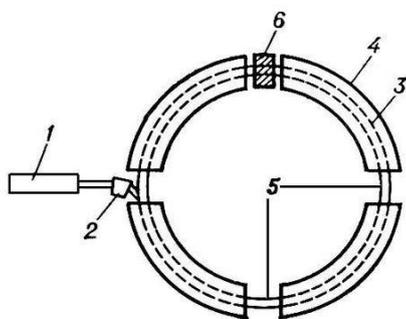


Рис. 2.5.4



Рис. 2.5.

5. **Синхрофазотрон** – циклический резонансный ускоритель тяжелых заряженных частиц (протонов, ионов), в котором объединяются свойства фазотрона и синхротрона. Здесь управляющее магнитное поле и частота ускоряющего электрического поля одновременно изменяются во времени так, чтобы радиус равновесной орбиты частиц оставался постоянным. На рис. 2.5.6 изображен Серпуховской синхрофазотрон У-70 с энергией 70 ГэВ.

Рассмотрим действие лоренцевой силы и рассчитаем энергию протонного ускорителя, представляющего собой кольцевой магнит диаметром 2 км. Между полюсами этого магнита расположена тороидальная вакуумная камера, в которую инжектирован пучок протонов. Если смотреть на ускоритель сверху (рис. 2.5.7), то пучок протонов движется по часовой стрелке со скоростью  $v$ , близкой к скорости света.

На протон действует центростремительная сила, направленная к центру. Если поле  $\vec{B}$  направлено из плоскости чертежа, то сила Лоренца  $\vec{F} = [\vec{v}, \vec{B}]$  всегда направлена к центру.



Рис. 2.5.6

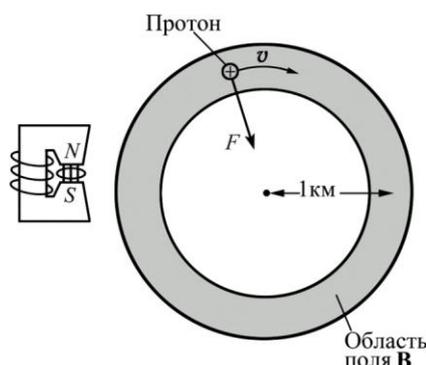


Рис. 2.5.7

Центростремительная сила равна

$$F_{ц} = m_r(v^2 / R),$$

где  $m_r$  – релятивистская масса протона. Так как эта сила обусловлена действием магнитного поля, она равна  $e v B$ . Тогда  $m_r v^2 / R = e v B$ .

Поскольку  $v \approx c$ , то можно записать, что  $m_r c^2 = e c B R$  – так можно рассчитать полную релятивистскую энергию протонов:

$$E = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1,8 \cdot 10^3 = 8,64 \cdot 10^{-8} \text{ Дж} = 540 \text{ ГэВ}.$$

Заметим при этом, что магнитное поле не увеличивает скорость или энергию частиц. Ускорение протонов осуществляется при каждом их обороте в кольце за счет электростатического поля, которое действует на коротком участке кольца.

Планируется построить в г. Серпухове протонный синхрофазотрон на энергию примерно 3 000 ГэВ (диаметр установки примерно 6 000 м).

В фазотронах, микротронах, синхротронах и синхрофазотронах частицы ускоряются до релятивистских скоростей.

Масса частицы  $m$  зависит от ее скорости  $v$  :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

где  $m_0$  – масса покоя частицы;  $\beta = v/c$  – отношение скорости частицы  $v$  к скорости света  $c$  в вакууме.

Кинетическая энергия частицы  $K$ :  $K = W - W_0$ , где  $W = mc^2$  – полная энергия частицы;  $W_0 = m_0c^2$  – энергия покоя частицы.

Импульс релятивистской частицы

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{K(K + 2m_0c^2)}.$$

Период обращения релятивистской частицы

$$T = \frac{2\pi m_0}{qB\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2\pi W}{qBc^2}.$$

Радиус окружности траектории релятивистской частицы

$$R = \frac{m_0 v}{qB\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

6. **Бетатрон** – единственный циклический ускоритель (электронов) нерезонансного типа, в котором ускорение осуществляется вихревым электрическим полем.

Электродвижущая сила индукции, создаваемая переменным магнитным полем, может существовать и в отсутствие проводников. Энергия  $K$ , передаваемая вихревым электрическим полем единичному положительному заряду, равна контурному интегралу по замкнутой траектории  $L$ :

$$K = \mathcal{E} = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Согласно закону Фарадея этот интеграл равен изменению магнитного потока через замкнутый контур  $L$ . Таким образом, вихревое электрическое поле может действовать на сгусток электронов,двигающихся в изменяющемся магнитном поле, и ускорять их. При определенных условиях движение электронов происходит в переменном магнитном поле по орбите постоянного радиуса и является устойчивым, причем энергия электронов увеличивается за счет вихревого электрического поля, соз-

даваемого изменяющимся магнитным потоком, пронизывающим орбиту частиц (рис. 2.5.8).

Как показано на рис. 2.5.8, переменный центральный магнитный поток  $B_{\text{ср}}$  создает в бетатроне вихревую ЭДС индукции, ускоряющую электроны. В соответствии с выражением

$$\frac{mv^2}{2} = q\mathcal{E}_i,$$

при каждом обходе контура энергия электронов увеличивается на величину  $q\mathcal{E}_i$ .

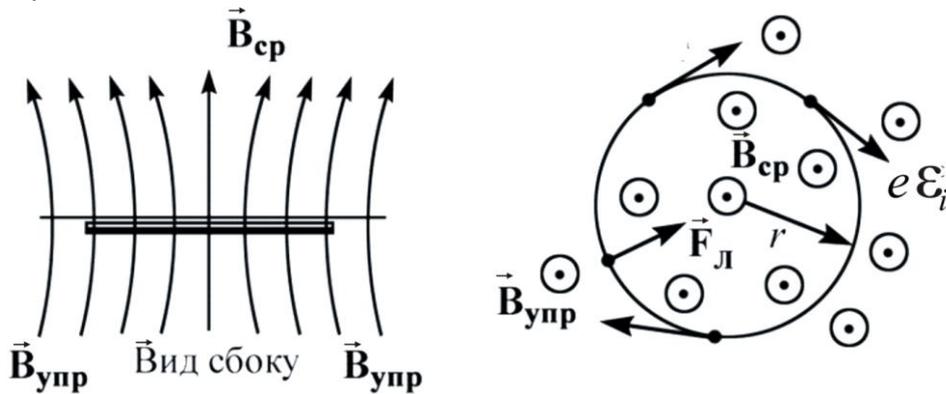


Рис. 2.5.8

Удержание электронов на стационарной круговой орбите осуществляется управляющим магнитным полем  $B_{\text{ynp}}$ , определенным образом изменяющимся во времени.

Бетатрон (рис. 2.5.9, а) состоит из тороидальной вакуумной камеры (рис. 2.5.9, в), помещающейся между полюсами электромагнита специальной формы (рис. 2.5.9, б). Обмотка электромагнита питается переменным током с частотой  $\nu \approx 100$  Гц.

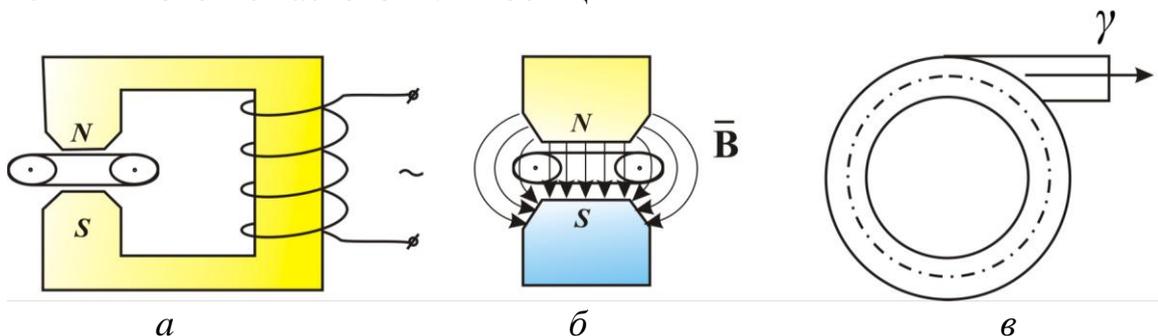


Рис. 2.5.9

Переменное магнитное поле выполняет две функции: во-первых, создает вихревое электрическое поле, ускоряющее электроны внутри

тороида; во-вторых, удерживает электроны на орбите (силовые линии располагаются так, чтобы пучок электронов находился в состоянии устойчивого равновесия в центре тора).

За время порядка  $10^{-3}$  с электроны успевают сделать до  $10^6$  оборотов и приобрести энергию до 500 МэВ (сотни МэВ в разных ускорителях). При такой энергии скорость электронов близка к скорости света ( $v \approx c$ ).

Кроме того, сам же пучок электронов в данном случае выполняет роль вторичной обмотки трансформатора.

В конце цикла ускорения включается дополнительное магнитное поле, которое отклоняет электроны от стационарной орбиты и направляет их на специальную мишень, расположенную внутри камеры. Попадая на мишень, электроны тормозятся в ней и испускают жесткие  $\gamma$ -лучи (или рентген), которые используются в ядерных исследованиях при неразрушающих методах контроля, в медицине и т.д.

Идея бетатрона запатентована в 1922 г. Дж. Слепяном. В 1928 г. Р. Видероз сформулировал условие существования равновесной орбиты – орбиты постоянного радиуса «условие 2:1». Первый действующий бетатрон был создан в 1940 г. Д. Керстом.

В СССР первые бетатроны были разработаны и созданы учеными Томского политехнического института (ныне университета): профессорами А.А. Воробьевым, Л.М. Ананьевым, В.И. Горбуновым, В.А. Москалевым, Б.Н. Родимовым. В последующие годы в институте интроскопии (НИИН ТПУ) под руководством профессора В.Л. Чахлова успешно разрабатываются и изготавливаются малогабаритные переносные бетатроны, применяемые в медицине, дефектоскопии и других прикладных и научных исследованиях.

Благодаря простоте конструкции, дешевизне и удобству пользования бетатроны нашли особо широкое применение в прикладных целях в диапазоне энергии 20–50 МэВ. Используется непосредственно сам электронный пучок или тормозное  $\gamma$ -излучение, энергия которого может плавно изменяться.

#### 2.5.4. Большой адронный коллайдер

*Большой адронный коллайдер* (англ. *Large Hadron Collider, LHC*; сокр. БАК) ускоритель заряженных частиц на встречных пучках, предназначенный для разгона протонов и тяжёлых ионов (ионов свинца) и изучения продуктов их соударений. БАК является самой крупной экспериментальной установкой в мире (рис. 2.5.10).

Большим назван из-за своих размеров: длина основного кольца ускорителя составляет 26 659 м; адронным из-за того, что он ускоряет адроны, то есть частицы, состоящие из кварков; коллайдером (англ. *collide* сталкиваться) из-за того, что пучки частиц ускоряются в противоположных направлениях и сталкиваются в специальных точках столкновения (рис. 2.5.11).

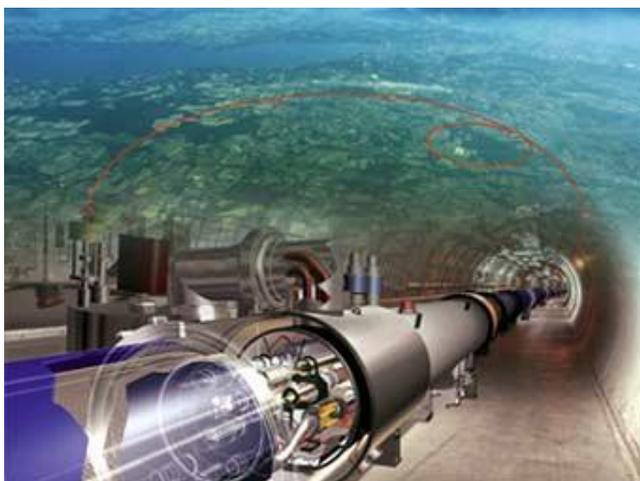


Рис. 2.5.10

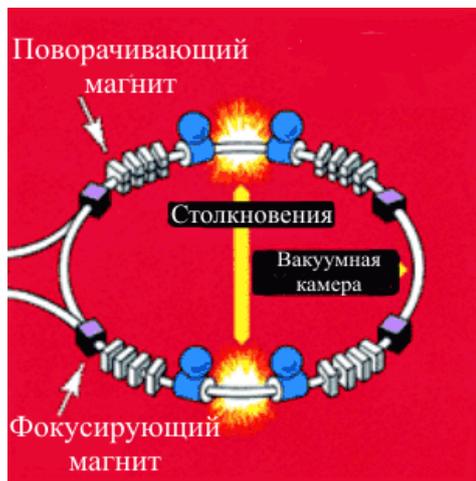


Рис.2.5.11

Атомы водорода поступают строго дозированными порциями в камеру **линейного ускорителя** (рис. 2.5.12), там от них отделяют электроны, оставляя только ядра водорода. Протоны несут положительный заряд, что позволяет придавать им ускорение при помощи электрического поля. Эту стадию разгона частиц в линейном ускорителе можно сравнить с *первой ступенью космической ракеты*. На выходе отсюда протоны будут двигаться со скоростью равной  $1/3$  скорости света. Теперь они готовы поступить в бустер или во *вторую ступень ракеты*.

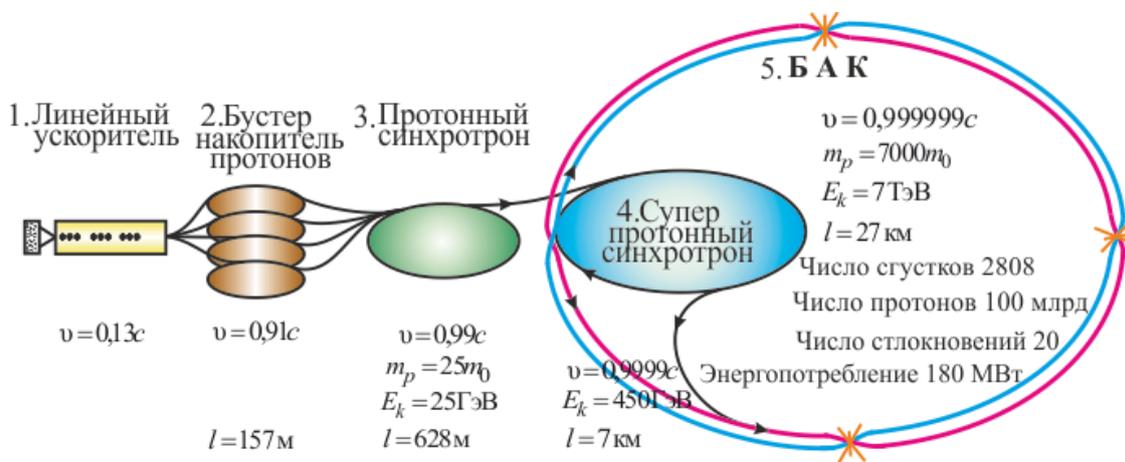


Рис. 2.5.12

Чтобы максимально повысить плотность потока частиц их разделяют на 4 части, каждая из которых поступает в отдельное кольцо *бустера* (накопителя). *Кольцевой ускоритель* разгоняет протоны до 91,6 % скорости света, при этом собирает их в плотный пучок. После этого частицы из 4 колец собираются воедино и поступают в *протонный синхротрон* эта *третья ступень нашей ракеты*.

Протяженность синхротрона 628 метров это расстояние протоны проходят за 1,2 секунды, разгоняясь до 99.9 % скорости света. Но в результате такого ускорения в 25 раз увеличивается масса протонов, то есть протоны не могут ускоряться, а становятся тяжелее. На этой стадии энергия каждой частицы равняется 25 млрд. электрон-вольт.

Теперь начинается 4 стадия. *Протонный суперсинхротрон* – огромное 7-ми километровое кольцо. Его задача увеличить энергию протонов до 450 млрд. электрон-вольт.

Далее пучки протонов будут готовы к перемещению в *большой адронный коллайдер*. В нем проложены две вакуумные трубы, по ним в противоположных направлениях, движутся пучки протонов. По одной трубе частицы движутся по часовой стрелки, а по другой против. Эти трубы пересекаются в четырех местах, где установлены детекторы. Именно здесь протоны можно столкнуть друг с другом, причем энергия столкновения в два раза превышает запас энергии каждого протона.

В течение получаса в коллайдер поступают около 2800 порций частиц. Каждую секунду протоны проходят, 27 километровый круг более 11 тысяч раз постоянно получая, импульсы ускоряющего электрического поля. Энергия каждого протона уже составляет 7 ТэВ, а масса в семь тысяч раз больше нормальной. Общая энергия двух сталкивающихся протонов равна 14 ТэВ.

### Контрольные вопросы. Упражнения

1. Как будет двигаться заряженная частица, влетевшая в однородное магнитное поле, к вектору  $\vec{B}$  под углом  $\pi/2$  ?
2. Когда заряженная частица движется в магнитном поле по спирали? От чего зависит шаг спирали? Ответы подтвердите выводами формул.
3. Что такое ускорители заряженных частиц? Какие они бывают и чем характеризуются?
10. Почему для ускорения электронов не применяются циклотроны?
11. В чем заключается принцип автофазировки? Где он используется?
12. Чем отличается синхротрон от синхрофазотрона?
13. На какую величину увеличивается энергия электронов при каждом обходе контура в бетатроне.
14. Какая достигнута максимальная энергия протонов?

## 2.6. Самоиндукция и взаимная индукция

### 2.6.1. Явление самоиндукции

До сих пор мы рассматривали изменяющиеся магнитные поля, не обращая внимание на то, что является их источником. На практике чаще всего магнитные поля создаются с помощью различного рода соленоидов, т.е. многовитковых контуров с током.

Здесь возможны два случая: при изменении тока в контуре изменяется магнитный поток, пронизывающий:

- а) этот же контур;
- б) соседний контур.

ЭДС индукции, возникающая в самом же контуре, называется **ЭДС самоиндукции**, а само явление – **самоиндукция**.

Если же ЭДС индукции возникает в соседнем контуре, то говорят о явлении **взаимной индукции**.

Ясно, что природа явления одна и та же, а разные названия использованы для того, чтобы подчеркнуть место возникновения ЭДС индукции.

Явление самоиндукции открыл американский ученый **Дж. Генри**.

Явление самоиндукции можно определить следующим образом: ток  $I$ , текущий в любом контуре, создает магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий этот же контур. При изменении  $I$  будет изменяться  $\Phi$ . Следовательно, в контуре будет наводиться ЭДС индукции.

Так как магнитная индукция  $B$  пропорциональна току  $I$  ( $B = \mu_0 n I$ ), следовательно,

$$\Phi = LI,$$

где  $L$  – коэффициент пропорциональности, названный индуктивностью контура.

Если внутри контура нет ферромагнетиков, то  $L = \text{const}$ , т.к.  $\mu = f(I) = f(H)$ .

Индуктивность контура  $L$  зависит от геометрии контура, числа витков, площади витка контура.

За единицу индуктивности в СИ принимается индуктивность такого контура, у которого при токе  $I = 1$  А возникает полный поток  $\Phi = 1$  Вб. Эта единица называется Генри (Гн).

Размерность индуктивности

$$[L] = \frac{[\Phi]}{[I]} = \frac{\text{Вб}}{\text{А}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}} = \text{Ом} \cdot \text{с} = \text{Гн}.$$

Вычислим индуктивность соленоида  $L$ . Если длина соленоида  $l$  гораздо больше его диаметра  $d$  ( $l \gg d$ ), то к нему можно применить формулы для бесконечно длинного соленоида. Тогда

$$B = \mu\mu_0 I \frac{N}{l},$$

здесь  $N$  – число витков. Поток через каждый из витков  $\Phi = BS$ .

Потокоцепление

$$\Psi = NBS = \mu\mu_0 I \frac{N}{l} NS = \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l} I.$$

Но мы знаем, что  $\Phi = LI$ , откуда индуктивность соленоида

$$L_{\text{сол}} = \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l} = \mu\mu_0 n^2 lS,$$

где  $n$  – число витков на единицу длины, т.е.  $n = N/l$ ,  $lS = V$  – объем соленоида, значит,

$$L_{\text{сол}} = \mu\mu_0 n^2 V. \quad (2.6.1)$$

Из этой формулы можно найти размерность для магнитной постоянной:

$$[\mu_0] = \frac{[L][l]}{[S]} = \frac{\text{Гн} \cdot \text{м}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Гн}}{\text{м}}.$$

При изменении тока в контуре возникает ЭДС самоиндукции, равная

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(IL) = -L \frac{dI}{dt}; \\ \varepsilon_i &= -L \frac{dI}{dt}. \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

Знак минус в этой формуле обусловлен правилом Ленца.

Явление самоиндукции играет важную роль в электротехнике и радиотехнике. Как мы увидим дальше, благодаря самоиндукции происходит перезарядка конденсатора, соединенного последовательно с катушкой индуктивности, в результате в такой LC-цепочке (колебательном контуре) возникают электромагнитные колебания.

### 2.6.2. Влияние самоиндукции на ток при замыкании и размыкании цепи, содержащей индуктивность

Рассмотрим несколько случаев влияния ЭДС самоиндукции на ток в цепи.

**Случай 1.** По правилу Ленца токи, возникающие в цепях вследствие самоиндукции, всегда направлены так, чтобы препятствовать изменению тока, текущего в цепи. Это приводит к тому, что при замыкании

ключа К установление тока  $I_2$  в цепи, содержащей индуктивность  $L$ , будет происходить не мгновенно, а постепенно (рис. 2.6.1).

Сила тока в этой цепи будет удовлетворять уравнению

$$I_2 = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (2.6.3)$$

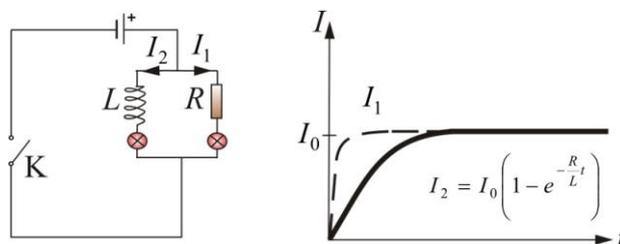


Рис. 2.6.1

Скорость возрастания тока будет характеризоваться *постоянной времени цепи*

$$\tau = \frac{L}{R}. \quad (2.6.4)$$

В цепи, содержащей только активное сопротивление  $R$ , ток  $I_1$  установится практически мгновенно (пунктирная кривая рис. 2.6.1).

**Случай 2.** При переводе ключа из положения 1 в 2 в момент времени  $t_0$  ток начнет уменьшаться, но ЭДС самоиндукции будет поддерживать ток в цепи, т.е. препятствовать резкому уменьшению тока (рис. 2.6.2). В этом случае убывание тока в цепи можно описать уравнением

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2.6.5)$$

Оба эти случая говорят, что чем больше индуктивность цепи  $L$  и чем меньше сопротивление  $R$ , тем больше постоянная времени  $\tau$  и тем медленнее изменяется ток в цепи.

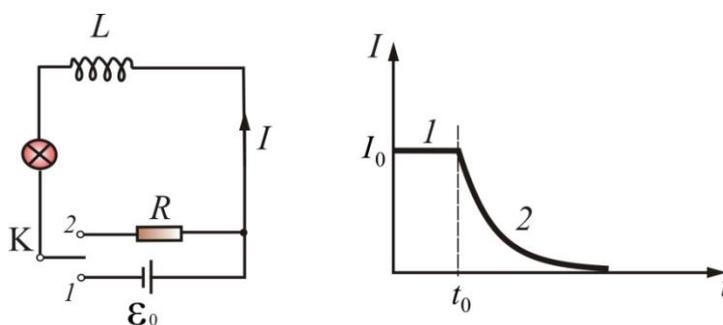


Рис. 2.6.2

**Случай 3.** Размыкание цепи, содержащей индуктивность  $L$ . Так как цепь разомкнута, ток не течёт, поэтому на рис. 2.6.3 изображена зависимость  $\mathcal{E}_i(t)$ .

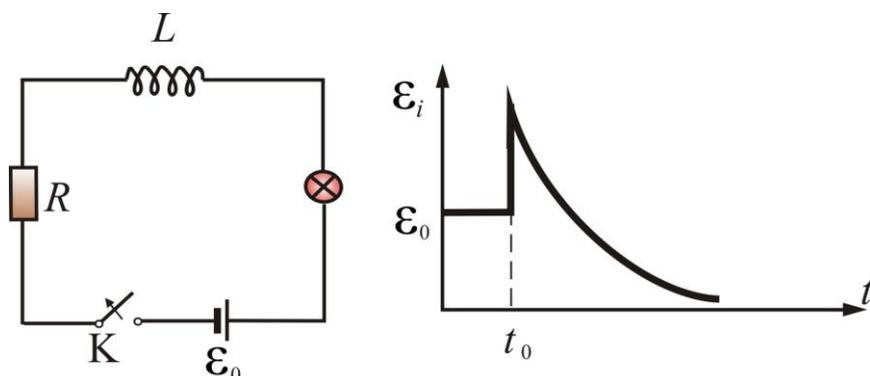


Рис. 2.6.3

При размыкании цепи в момент времени  $t_0$   $R \rightarrow \infty$ . Это приводит к резкому возрастанию ЭДС индукции, определяемой по формуле

$$\mathcal{E}_i = -L \frac{dI}{dt}.$$

Происходит этот скачок вследствие большой величины скорости изменения тока  $\frac{dI}{dt}$ .

$\mathcal{E}_i$  резко возрастает по сравнению с  $\mathcal{E}_0$  и даже может быть в несколько раз больше  $\mathcal{E}_0$ . Поэтому нельзя резко размыкать цепь, включающую в себя трансформаторы и другие индуктивности.

### 2.6.3. Взаимная индукция

Возьмем два контура, расположенные недалеко друг от друга, как это показано на рис. 2.6.4.

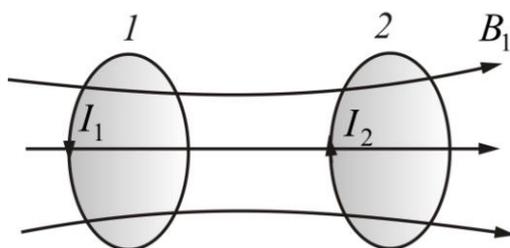


Рис. 2.6.4

В первом контуре течет ток  $I_1$ . Он создает магнитный поток, который пронизывает и витки второго контура:

$$\Phi_2 = L_{21}I_1. \quad (2.6.6)$$

При изменении тока  $I_1$  во втором контуре наводится ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_{21} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (2.6.7)$$

Аналогично ток  $I_2$  второго контура создает магнитный поток, пронизывающий первый контур,

$$\Phi_1 = L_{12}I_2. \quad (2.6.8)$$

И при изменении тока  $I_2$  наводится ЭДС

$$\mathcal{E}_{12} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (2.6.9)$$

Контуров называются *связанными*, а явление – *взаимной индукцией*. Коэффициенты  $L_{21}$  и  $L_{12}$  называются *взаимной индуктивностью*, или *коэффициентами взаимной индукции*, причём  $L_{21} = L_{12} = L$ .

Трансформатор является типичным примером двух связанных контуров. Рассмотрим индуктивность трансформатора и найдем коэффициент трансформации.

#### 2.6.4. Индуктивность трансформатора

Итак, явление взаимной индукции используется в широко распространенных устройствах – *трансформаторах*.

Трансформатор был изобретен Яблочковым, русским ученым, в 1876 г. для отдельного питания отдельных электрических источников света (свечи Яблочкова).

Рассчитаем *взаимную индуктивность двух катушек* ( $L_1$  и  $L_2$ ), намотанных на *общий сердечник* (рис. 2.6.5).

Когда в первой катушке идет ток  $I_1$ , в сердечнике возникает магнитная индукция  $\vec{B}$  и магнитный поток  $\Phi$  через поперечное сечение  $S$ .

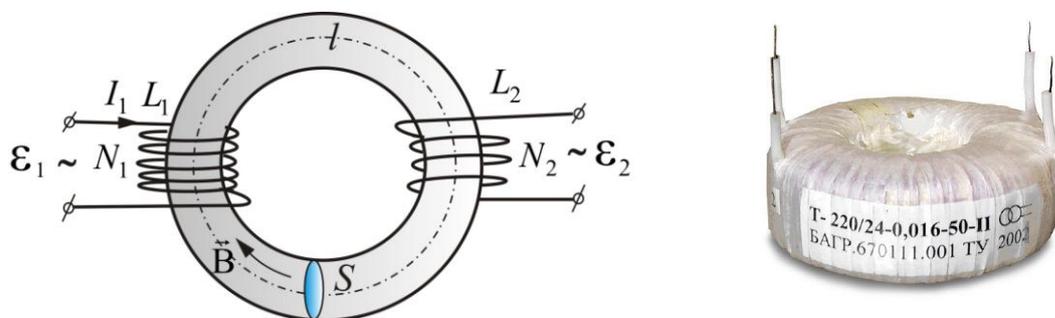


Рис2.6.5

Магнитное поле тороида можно рассчитать по формуле

$$B = \mu\mu_0 I_1 \frac{N_1}{l}.$$

Через вторую обмотку проходит полный магнитный поток  $\Psi_2$ , сцепленный со второй обмоткой:

$$\Psi_2 = N_2 BS = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S I_1,$$

здесь  $\Psi_2 = N_2 \Phi$  – потокосцепление, которое можно найти по формуле

$$\Psi_2 = L_{21} I_1.$$

По определению взаимная индуктивность двух катушек равна

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\Psi_2}{I_1} = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S.$$

К первичной обмотке подключена переменная ЭДС  $\varepsilon_1$ . По закону Ома ток в этой цепи будет определяться алгебраической суммой внешней ЭДС и ЭДС индукции:

$$\varepsilon_1 = -\frac{d(N_1 \Phi)}{dt} + I_1 R_1,$$

где  $R_1$  – сопротивление обмотки;

$R_1$  делают малым (медные провода), и  $I_1 R_1 \rightarrow 0$ . Тогда

$$\varepsilon_1 \approx \frac{d(N_1 \Phi)}{dt} \approx N_1 \frac{d\Phi}{dt}.$$

Во второй обмотке, по аналогии,  $\varepsilon_2 \approx N_2 \frac{d\Phi}{dt}$ , откуда

$$\frac{E_1}{E_2} \approx \frac{N_1}{N_2}. \quad (2.6.10)$$

Если пренебречь потерями, т.е. предположить, что  $R \approx 0$ , то

$$\varepsilon_1 I_1 = \varepsilon_2 I_2. \quad (2.6.11)$$

Коэффициент трансформации  $k = \frac{E_2}{E_1} = \frac{N_2}{N_1}$ .

### 2.6.5. Энергия магнитного поля

Рассмотрим случай, запаса энергии в схеме, изображенной на (рис. 2.6.2).

Сначала замкнем соленоид  $L$  на источник ЭДС  $\varepsilon_0$  в нем будет протекать ток  $I_0$ . Затем, в момент времени  $t_0$ , переключим ключ в положе-

ние 2 – замкнем соленоид на сопротивление  $R$ . В цепи будет течь убывающий ток  $I$ . При этом будет совершена работа  $dA = \varepsilon_0 Idt$ , или

$$dA = -L \frac{dI}{dt} Idt = -LI dI; \quad A = -L \int_I^0 IdI = \frac{LI^2}{2};$$

$$A = \frac{LI^2}{2}. \quad (2.6.12)$$

Эта работа пойдет на нагревание проводников. Но откуда взялась эта энергия? Поскольку других изменений, кроме исчезновения магнитного поля в окружающем пространстве, не произошло, остается заключить, что энергия была локализована в магнитном поле. Значит, проводник с индуктивностью  $L$ , по которой течет ток  $I$ , обладает энергией

$$W = \frac{LI^2}{2}. \quad (2.6.13)$$

Выразим энергию магнитного поля через параметры магнитного поля. Для соленоида

$$L = \mu\mu_0 n^2 l S = \mu\mu_0 n^2 V;$$

$$H = In; \text{ отсюда } I = \frac{H}{n}.$$

Подставим эти значения в формулу (2.6.13):

$$W = \frac{\mu\mu_0 n^2 V H^2}{2n^2} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} V. \quad (2.6.14)$$

Пусть  $w$  – плотность энергии, или энергия в объеме  $V$ , тогда

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}, \quad (2.6.15)$$

но т.к.  $B = \mu\mu_0 H$ , то

$$w = \frac{BH}{2}, \text{ или } w = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}. \quad (2.6.16)$$

Энергия однородного магнитного поля в длинном соленоиде может быть рассчитана по формуле

$$W = \frac{1}{2} \mu\mu_0 n^2 I^2 V, \quad (2.6.17)$$

а плотность энергии

$$w = \frac{1}{2} \mu\mu_0 n^2 I^2. \quad (2.6.18)$$

Плотность энергии магнитного поля в соленоиде с сердечником будет складываться из энергии поля в вакууме и в магнетике сердечника:

$$w = w_{\text{вак}} + w_{\text{магнет}}, \text{ отсюда } w_{\text{магнет}} = w - w_{\text{вак}}.$$

Так как в вакууме  $\mu = 1$ , имеем плотность энергии магнитного поля:

$$w_{\text{магнет}} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} - \frac{\mu_0 H^2}{2} = \frac{\mu_0(\mu - 1)H^2}{2}.$$

### Контрольные вопросы. Упражнения

1. В чем отличие явления самоиндукции от явления взаимной индукции? Какова природа этих явлений?

2. На рис. 2.4.1 схематично воспроизведены опыты Фарадея. Использовались замкнутая на амперметр катушка и магнит, который выдвигали из катушки (полюсы магнита и направления его движения указаны на рисунке). Поясните возникновение тока в каждом из приведенных случаев.

3. На рис. схематично воспроизведены опыты Фарадея. 1) Катушка, замкнутая на амперметр, может передвигаться относительно неподвижного магнита (возможные направления движения катушки указаны стрелками). Поясните суть этих опытов. 2) Концы катушки большего диаметра замкнуты на амперметр, а через меньшую катушку (она может вставляться в другую катушку) пропускается ток (цепь этой катушки содержит реостат и выключатель). Поясните суть этих опытов.

4. Проволочная катушка замкнута на амперметр и в нее вставлен магнит. Будет ли возникать индукционный ток в катушке, если магнит неподвижен? Почему?

5. Как определяется направление индукционного тока?

6. Два круговых проводника расположены перпендикулярно друг другу. Почему, при изменении силы тока во втором проводнике, в первом не будет возникать индукционный ток?

7. Два одинаковых полосовых магнита одновременно начинают падать с одной и той же высоты сквозь одинаково закрепленные катушки. Первый магнит проходит сквозь замкнутую катушку, второй – через разомкнутую. Какой из магнитов упадет позже? Почему?

8. Каким полюсом к наблюдателю повернется магнитная стрелка, находящаяся под проводом, если южный полюс полосового магнита выдвигать из катушки (рис. 2.4.3)?

9. Каков физический смысл знака «минус» в законе электромагнитной индукции?

10. Где сосредоточена энергия магнитного поля?

11. Выразите энергию магнитного поля и плотность энергии через параметры магнитного поля.

12. Рассмотрите случай, запаса энергии в схеме, изображенной на (рис. 2.6.2).

**Сравнительные характеристики электрического и магнитного полей.**

Таблица 1

Электростатическое поле	Формулы и обозначения	Магнитное поле	Формулы и обозначения
Точечный заряд	$q$	Ток	$I$
Электрическая постоянная	$\epsilon_0$	Магнитная постоянная	$\mu_0$
Диэлектрическая проницаемость	$\epsilon$	Магнитная проницаемость	$\mu$
Диэлектрическая восприимчивость	$\chi = \epsilon - 1$	Магн. восприимчивость	$\kappa = \mu - 1$
Взаимодействие точечных зарядов	$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{ q_1q_2 }{r^2}$	Взаимодействие токов	$F = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \frac{2I_1I_2}{r}$
Напряженность электр. поля	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$	Магнитная индукция	$\vec{B} = \frac{\vec{M}_{\max}}{\vec{P}_m}$
Электростатическая индукция	$\vec{D} = \epsilon_0\epsilon\vec{E}$	Напряженность магнит. поля	$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0\mu}$
Принцип суперпозиции	$\vec{E} = \sum \vec{E}_i$	Принцип суперпозиции	$\vec{B} = \sum \vec{B}_i$
Поляризованность	$\vec{P} = \chi\epsilon_0\vec{E}$	Намагниченность	$\vec{J} = \kappa\vec{H}$
Емкость проводника	$C = \frac{q}{\phi} = \frac{\epsilon_0\epsilon S}{d}$	Индуктивность катушки	$L = \frac{\Phi}{I} = \mu_0\mu Sl$
Энергия конденсатора	$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$	Энергия катушки с током	$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}$
Объемная плотность энергии	$w = \frac{ED}{2} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$	Объемная плотн. энергии	$w = \frac{BH}{2} = \frac{\mu_0 H^2}{2}$
Циркуляция $\vec{E}$	$\oint_L \vec{E}dl = 0$	Циркуляция $\vec{B}$	$\oint_L \vec{H} = I_{\text{полн}}$
Теорема Гаусса	$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$	Теорема Гаусса	$\Phi_B = \oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0$
Безвихревое поле	$\text{rot}\vec{E} = 0$	Созд. токами	$\text{rot}\vec{H} = \vec{j}_{\text{полн}}$
Созд. зарядами	$\text{div}\vec{D} = \nabla\vec{D} = \rho$	Вихревое поле	$\text{div}\vec{B} = \nabla\vec{B} = 0$

## 2.7. Магнитные свойства вещества

### 2.7.1. Магнитные моменты электронов и атомов

Различные среды при рассмотрении их магнитных свойств называют *магнетиками*.

Все вещества в той или иной мере взаимодействуют с магнитным полем. У некоторых материалов магнитные свойства сохраняются и в отсутствие внешнего магнитного поля. Намагничивание материалов происходит за счет токов, циркулирующих внутри атомов, – вращения электронов и движения их в атоме. Поэтому намагничивание вещества следует описывать при помощи реальных атомных токов, называемых амперовскими токами.

В отсутствие внешнего магнитного поля магнитные моменты атомов вещества ориентированы обычно беспорядочно, так что создаваемые ими магнитные поля компенсируют друг друга. При наложении внешнего магнитного поля атомы стремятся сориентироваться своими магнитными моментами  $\vec{P}_m$  по направлению внешнего магнитного поля, и тогда компенсация магнитных моментов нарушается, тело приобретает магнитные свойства – намагничивается. Большинство тел намагничивается очень слабо, и величина индукции магнитного поля  $B$  в таких веществах мало отличается от величины индукции магнитного поля в вакууме  $B_0$ . Если магнитное поле слабо усиливается в веществе, то такое вещество называется *парамагнетиком*:

$$\mu = \frac{B}{B_0} > 1 \quad (\text{Ce}^{3+}, \text{Pr}^{3+}, \text{Ti}^{3+}, \text{V}^{3+}, \text{Fe}^{2+}, \text{Mg}^{2+}, \text{Li}, \text{Na});$$

если ослабевает, то это *диамагнетик*:

$$\mu = \frac{B}{B_0} < 1 \quad (\text{Bi}, \text{Cu}, \text{Ag}, \text{Au} \text{ и др.}).$$

Но есть вещества, обладающие сильными магнитными свойствами. Такие вещества называются *ферромагнетиками*:

$$\mu = \frac{B}{B_0} \gg 1 \quad (\text{Fe}, \text{Co}, \text{Ni} \text{ и пр.}).$$

Эти вещества способны сохранять магнитные свойства и в отсутствие внешнего магнитного поля, представляя собой постоянные магниты.

Все тела при внесении их во внешнее магнитное поле *намагничиваются* в той или иной степени, т.е. создают собственное магнитное поле, которое накладывается на внешнее магнитное поле.

**Магнитные свойства вещества** определяются магнитными свойствами электронов и атомов.

Магнетики состоят из атомов, которые, в свою очередь, состоят из положительных ядер и, условно говоря, вращающихся вокруг них электронов.

Электрон, движущийся по орбите в атоме, эквивалентен замкнутому контуру с **орбитальным током**:

$$I = ev,$$

где  $e$  – заряд электрона;  $v$  – частота его вращения по орбите;

$$v = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r}.$$

Орбитальному току соответствует **орбитальный магнитный момент** электрона

$$\vec{P}_m = IS \vec{n} = \frac{e\vec{v}}{2\pi r}, \quad (2.7.1)$$

где  $S$  – площадь орбиты;  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к  $S$ ;  $\vec{v}$  – скорость электрона. На рис. 2.7.1 показано направление орбитального магнитного момента электрона.

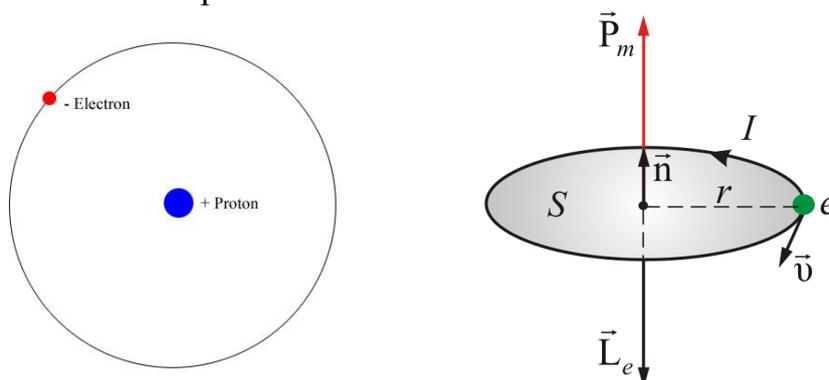


Рис. 2.7.1

Электрон, движущийся по орбите, имеет **орбитальный момент импульса**  $\vec{L}_e = m\vec{v}r$ , который направлен противоположно по отношению к  $P_m$  и связан с ним соотношением

$$\vec{P}_m = \gamma \vec{L}_e. \quad (2.7.2)$$

Здесь коэффициент пропорциональности  $\gamma$  называется **гиромагнитным отношением** орбитальных моментов и равен

$$\gamma = -\frac{e}{2m}, \quad (2.7.3)$$

где  $m$  – масса электрона.

Кроме того, электрон обладает *собственным моментом импульса*  $L_s$ , который называется *спином электрона*:

$$L_s = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar, \quad (2.7.4)$$

где  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \frac{\text{Дж}}{\text{с}}$ ;  $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \frac{\text{Дж}}{\text{с}}$  – постоянная Планка.

Спину электрона  $L_s$  соответствует *спиновый магнитный момент* электрона  $P_{ms}$ , направленный в противоположную сторону:

$$\vec{P}_{ms} = \gamma_s \vec{L}_s. \quad (2.7.5)$$

Величину  $\gamma_s$  называют *гиромагнитным отношением спиновых моментов*:

$$\gamma_s = -\frac{e}{m}. \quad (2.7.6)$$

Проекция спинового магнитного момента электрона на направление вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  может принимать только одно из следующих двух значений:

$$P_{msB} = \pm \mu_B = \pm \frac{e\hbar}{2m} = \frac{l}{2m} L_s, \quad (2.7.7)$$

где  $\mu_B$  – *квантовый магнитный момент электрона – магнетон Бора*.

*Орбитальным магнитным моментом*  $\vec{P}_m$  атома называется геометрическая сумма орбитальных магнитных моментов всех электронов атома

$$\vec{P}_m = \sum_{i=1}^Z \vec{P}_{mi}, \quad (2.7.8)$$

где  $Z$  – число всех электронов в атоме – порядковый номер элемента в периодической системе Менделеева.

*Орбитальным моментом импульса*  $\vec{L}$  атома называется геометрическая сумма моментов импульса всех электронов атома:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^Z \vec{L}_{ei}. \quad (2.7.9)$$

Более подробно вышеназванные характеристики мы обсудим в разделе «Атомная и ядерная физика».

### 2.7.2. Атом в магнитном поле

При внесении атома в магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$  на электрон, движущийся по орбите, эквивалентной замкнутому контуру с током, действует момент сил  $\vec{M}$ :

$$\vec{M} = [\vec{P}_m, \vec{B}]. \quad (2.7.10)$$

При этом изменяется орбитальный момент импульса электрона:

$$\frac{d\vec{L}_e}{dt} = [\vec{P}_m, \vec{B}] = [-\gamma\vec{B}, \vec{L}_e]. \quad (2.7.11)$$

Аналогично изменяется вектор орбитального магнитного момента электрона:

$$\frac{d\vec{P}_m}{dt} = [-\gamma\vec{B}, \vec{P}_m]. \quad (2.7.12)$$

Из этого следует, что векторы  $\vec{L}_e$  и  $\vec{P}_m$  и сама орбита *прецессируют* вокруг направления вектора  $\vec{B}$ . На рис. 2.7.2 показано прецессионное движение электрона и его орбитального магнитного момента, а также дополнительное (прецессионное) движение электрона.

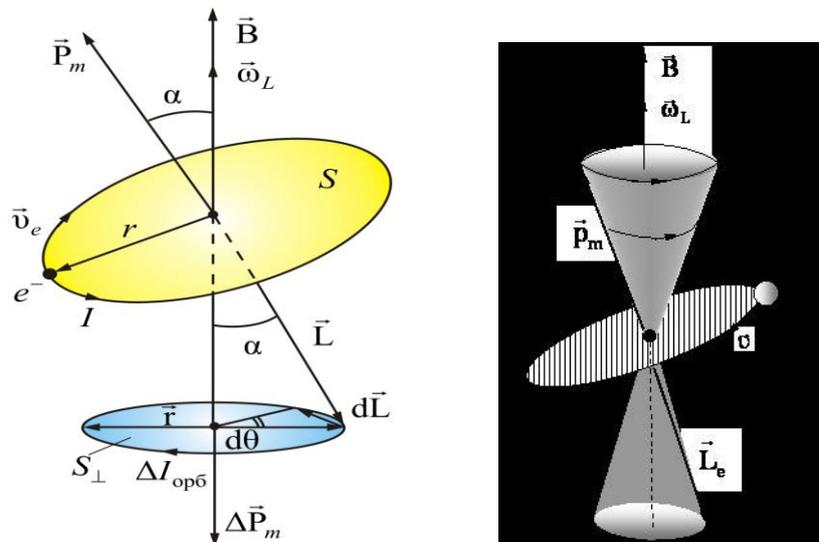


Рис. 2.7.2

Эта прецессия называется *ларморовской прецессией*. Угловая скорость этой прецессии  $\omega_L$  зависит только от индукции магнитного поля и совпадает с ней по направлению:

$$\vec{\omega}_L = \frac{e}{2m} \vec{B}. \quad (2.7.13)$$

**Теорема Лармора:** единственным результатом влияния магнитного поля на орбиту электрона в атоме является прецессия орбиты и вектора  $\vec{P}_m$  – орбитального магнитного момента электрона с угловой скоростью  $\omega_L$  вокруг оси, проходящей через ядро атома параллельно вектору индукции магнитного поля.

Прецессия орбиты электрона в атоме приводит к появлению дополнительного орбитального тока

$$\Delta I_{\text{орб}} = e \frac{\omega_L}{2\pi}, \quad (2.7.14)$$

направленного противоположно току  $I$ , и соответствующего ему наведенного орбитального магнитного момента

$$\Delta \vec{P}_m = -\Delta I_{\text{орб}} S_{\perp} = -\frac{e^2 S_{\perp}}{4\pi m} \vec{B}, \quad (2.7.15)$$

где  $S_{\perp}$  – площадь проекции орбиты электрона на плоскость, перпендикулярную вектору  $\vec{B}$ . Знак минус говорит, что  $\Delta \vec{P}_m$  противоположен вектору  $\vec{B}$ .

Полный орбитальный магнитный момент атома равен векторной сумме

$$\vec{P}_{ma} = \sum \vec{P}_{m_i} + \sum \Delta \vec{P}_{m_i}.$$

В общем случае орбитальный магнитный момент атома равен

$$\vec{P}_{ma} = -\frac{e^2 Z S_{\perp}}{4\pi m} \vec{B}. \quad (2.7.16)$$

### 2.7.3. Магнитное поле в веществе

При изучении магнитного поля в веществе различают два типа токов – **макротоки и микротоки**.

**Макротоками** называются токи проводимости и конвекционные токи, связанные с движением заряженных макроскопических тел.

**Микротоками** (молекулярными токами) называют токи, обусловленные движением электронов в атомах, молекулах и ионах.

Магнитное поле в веществе является суперпозицией двух полей: внешнего магнитного поля, создаваемого макротоками, и внутреннего, или собственного, магнитного поля, создаваемого микротоками.

Характеризует магнитное поле в веществе вектор  $\vec{B}$ , равный геометрической сумме  $\vec{B}_{\text{внеш}}$  и  $\vec{B}_{\text{внутр}}$  магнитных полей:

$$\vec{B} = \vec{B}_{\text{внеш}} + \vec{B}_{\text{внутр}}. \quad (2.7.17)$$

Количественной характеристикой намагниченного состояния вещества служит векторная величина – **намагниченность**  $\vec{J}$ , равная отношению магнитного момента малого объема вещества к величине этого объема:

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^n \vec{P}_{mi}, \quad (2.7.18)$$

где  $\vec{P}_{mi}$  – магнитный момент  $i$ -го атома из числа  $n$  атомов в объеме  $\Delta V$ .

Для того чтобы связать вектор намагниченности среды  $\vec{J}$  с током  $I_{\text{микро}}$ , рассмотрим равномерно намагниченный параллельно оси цилиндрический стержень длиной  $h$  и поперечным сечением  $S$  (рис. 2.7.3, а). Равномерная намагниченность означает, что плотность атомных циркулирующих токов внутри материала  $I_{\text{микро}}$  повсюду постоянна.

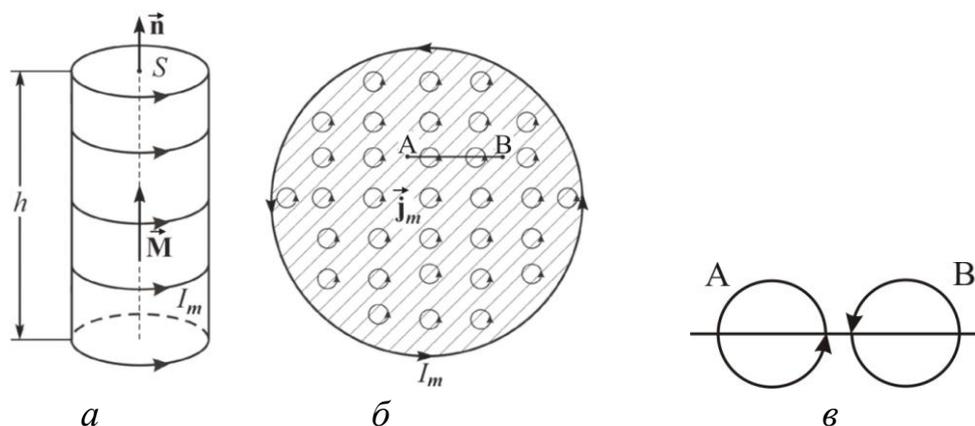


Рис. 2.7.3

Каждый атомный ток в плоскости сечения стержня, перпендикулярной его оси, представляет микроскопический кружок, причем все микротоки текут в одном направлении – против часовой стрелки (рис. 2.7.3, б). В местах соприкосновения отдельных атомов и молекул (А, В) молекулярные токи противоположно направлены и компенсируют друг друга (рис. 2.7.3, в). Нескомпенсированными остаются лишь токи, текущие вблизи поверхности материала, создавая на поверхности материала некоторый микроток  $I_{\text{микро}}$ , возбуждающий во внешнем пространстве магнитное поле, равное полю, созданному всеми молекулярными токами.

Закон полного тока для магнитного поля в вакууме можно обобщить на случай магнитного поля в веществе:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I_{\text{макро}} + I_{\text{микро}}), \quad (2.7.19)$$

где  $I_{\text{микро}}$  и  $I_{\text{макро}}$  – алгебраическая сумма макро- и микротоков сквозь поверхность, натянутую на замкнутый контур  $L$ .

Как видно из рис. 2.7.4, вклад в  $I_{\text{микро}}$  дают только те молекулярные токи, которые нанизаны на замкнутый контур  $L$ .

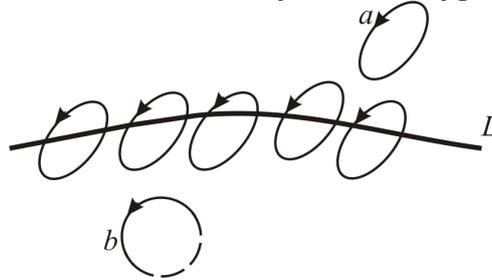


Рис. 2.7.4

Алгебраическая сумма сил микротоков связана с циркуляцией вектора намагниченности соотношением

$$I_{\text{микро}} = \oint_L \vec{J} d\vec{l}, \quad (2.7.20)$$

тогда закон полного тока можно записать в виде

$$\oint_L \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = I_{\text{макро}}. \quad (2.7.21)$$

Вектор

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$$

называется **напряженностью магнитного поля**.

Таким образом, закон **полного тока** для магнитного поля в веществе утверждает, что **циркуляция вектора напряженности** магнитного поля  $\vec{H}$  вдоль произвольного замкнутого контура  $L$  равна алгебраической сумме макротоков сквозь поверхность, натянутую на этот контур:

$$\oint_L \vec{H} dl = I_{\text{макро}}. \quad (2.7.22)$$

Выражение (2.7.22) – это закон полного тока в интегральной форме. В дифференциальной форме его можно записать как

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_{\text{макро}}. \quad (2.7.23)$$

Намагниченность изотропной среды с напряженностью  $\vec{H}$  связаны соотношением

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (2.7.24)$$

где  $\chi$  – коэффициент пропорциональности, характеризующий магнитные свойства вещества и называемый *магнитной восприимчивостью среды*. Он связан с магнитной проницаемостью соотношением  $\mu = 1 + \chi$ .

#### 2.7.4. Диамагнетики и парамагнетики в магнитном поле

Микроскопические плотности токов в намагниченном веществе чрезвычайно сложны и сильно изменяются даже в пределах одного атома. Но во многих практических задачах столь детальное описание является излишним, и нас интересуют средние магнитные поля, созданные большим числом атомов.

Магнетики можно разделить на три основные группы: *диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики*.

Зависимость намагниченности от напряженности магнитного поля для разных материалов приведена на рис. 2.7.5.

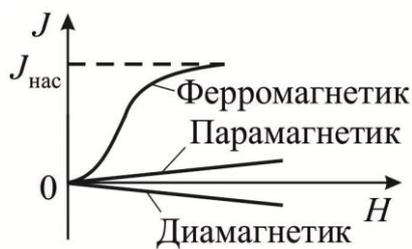


Рис. 2.7.5

**Диамагнетизм** (от греч. *dia* – расхождение и магнетизм) – свойство веществ намагничиваться навстречу приложенному магнитному полю.

**Диамагнетиками** называются вещества, магнитные моменты атомов которых в отсутствие внешнего поля равны нулю, т.к. магнитные моменты всех электронов атома взаимно скомпенсированы (например: инертные газы, водород, азот, NaCl и др.).

При внесении диамагнитного вещества в магнитное поле его атомы приобретают наведенные магнитные моменты. В пределах малого объема  $\Delta V$  изотропного диамагнетика наведенные магнитные моменты  $\Delta P_m$  всех атомов одинаковы и направлены *противоположно* вектору  $\vec{B}$ .

Вектор намагниченности диамагнетика равен

$$\vec{J} = \frac{n\Delta\vec{P}_m}{\Delta V} = n_0\Delta\vec{P}_m = \frac{\vec{B}}{\mu_0}\chi = \vec{H}\cdot\chi, \quad (2.7.25)$$

где  $n_0$  – концентрация атомов;  $\mu_0$  – магнитная постоянная;  $\chi$  – магнитная восприимчивость среды.

Для всех диамагнетиков  $\chi < 0$ . Таким образом, вектор  $\vec{B}_{\text{внутр}}$  магнитной индукции собственного магнитного поля, создаваемого диамагнетиком при его намагничивании во внешнем поле  $\vec{B}_{\text{внеш}}$ , направлен в сторону, противоположную  $\vec{B}_{\text{внеш}}$ . (В отличие от диэлектрика в электрическом поле).

У диамагнетиков  $|\chi| \sim 10^{-6} - 10^{-5}$ .

**Парамагнетизм** (от греч. *para* – возле, рядом и магнетизм) – свойство веществ во внешнем магнитном поле намагничиваться в направлении этого поля, поэтому внутри парамагнетика к действию внешнего поля прибавляется действие наведенного внутреннего поля.

**Парамагнетиками** называются вещества, атомы которых имеют, в отсутствие внешнего магнитного поля, отличный от нуля магнитный момент  $\vec{P}_m$ .

Эти вещества намагничиваются в направлении вектора  $\vec{B}_{\text{внеш}}$ .

К *парамагнетикам* относятся многие щелочные металлы, кислород  $O_2$ , оксид азота  $NO$ , хлорное железо  $FeCl_2$  и др.

В отсутствие внешнего магнитного поля намагниченность парамагнетика  $J = 0$ , т.к. векторы  $\vec{P}_{mi}$  разных атомов ориентированы беспорядочно.

При внесении парамагнетика во внешнее магнитное поле происходит преимущественная ориентация собственных магнитных моментов атомов  $\vec{P}_{mi}$  по направлению поля, так что парамагнетик намагничивается. Значения  $i$  для парамагнетиков положительны ( $i > 0$ ) и находятся в пределах  $\sim 10^{-5} - 10^{-3}$ , т.е. примерно как и у диамагнетиков.

### 2.7.5. Ферромагнетики

К *ферромагнетикам* (*ferrum* – железо) относятся вещества, магнитная восприимчивость которых положительна и достигает значений  $10^4 - 10^5$ . Намагниченность  $\vec{J}$  и магнитная индукция  $\vec{B}$  ферромагнетиков растут с увеличением напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  нелинейно, и в полях  $\sim 8 \cdot 10^3$  А/м намагниченность ферромагнетиков достигает предельного значения  $\vec{J}_m$ , а вектор магнитной индукции растет линейно с  $\vec{H}$ :  $\vec{B} = \vec{J}_m \mu_0 + \vec{H} \mu_0$ .

Ферромагнитные свойства материалов проявляются только у веществ в твердом состоянии, атомы которых обладают постоянным спиновым, или орбитальным, магнитным моментом, в частности у атомов с недостроенными внутренними электронными оболочками. Типичны-

ми ферромагнетиками являются переходные металлы. В ферромагнетиках происходит резкое усиление внешних магнитных полей. Причем для ферромагнетиков  $i$  сложным образом зависит от величины магнитного поля. Типичными ферромагнетиками являются Fe, Co, Ni, Gd, Tb, Dy, Ho, Er, Tm, а также соединения ферромагнитных материалов с неферромагнитными:  $\text{Fe}_3\text{Al}$ ,  $\text{Ni}_3\text{Mn}$ ,  $\text{ZnCMn}_3$  и др.

Существенным отличием ферромагнетиков от диа- и парамагнетиков является наличие у ферромагнетиков самопроизвольной (спонтанной) намагниченности в отсутствие внешнего магнитного поля. Наличие у ферромагнетиков самопроизвольного магнитного момента  $\vec{J}$  в отсутствие внешнего магнитного поля означает, что электронные спины и магнитные моменты атомных носителей магнетизма ориентированы в веществе упорядоченным образом.

*Ферромагнетики – это вещества, обладающие самопроизвольной намагниченностью, которая сильно изменяется под влиянием внешних воздействий – магнитного поля, деформации, температуры.*

Ферромагнетики, в отличие от слабо магнитных диа- и парамагнетиков, являются сильно магнитными веществами: внутреннее магнитное поле в них может в сотни раз превосходить внешнее поле.

*Основные отличия магнитных свойств ферромагнетиков:*

1. Нелинейная зависимость намагниченности от напряженности магнитного поля  $H$  (рис. 2.7.6).

Как видно из рис. 2.7.6, при  $H > H_S$  наблюдается магнитное насыщение.

2. При  $H < H_S$  зависимость магнитной индукции  $B$  от  $H$  нелинейная, а при  $H > H_S$  – линейная (рис. 2.7.7).

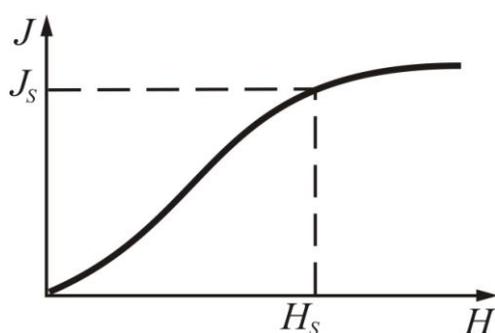


Рис. 2.7.6

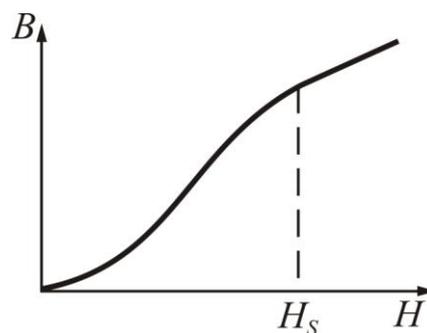


Рис. 2.7.7

3. Зависимость относительной магнитной проницаемости от  $H$  имеет сложный характер (рис. 2.7.8), причем максимальные значения  $\mu$  очень велики ( $10^3 - 10^6$ ).

Впервые систематические исследования  $\mu$  от  $H$  были проведены в 1872 г. А.Г. Столетовым (1839–1896) – выдающимся русским физиком, организатором физической лаборатории в Московском университете. На рис. 2.7.9 изображена зависимость магнитной проницаемости некоторых ферромагнетиков от напряженности магнитного поля – кривая Столетова.

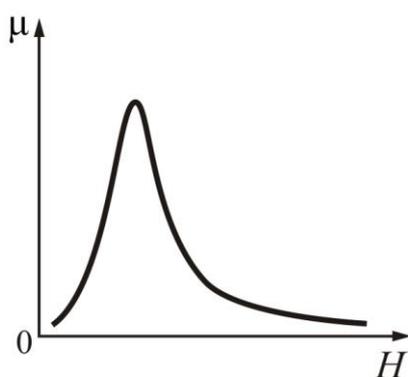


Рис. 2.7.8

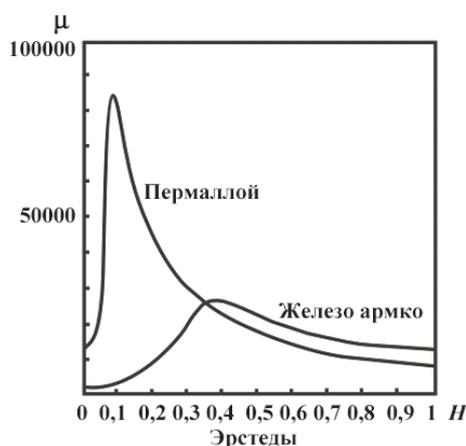


Рис. 2.7.9

4. У каждого ферромагнетика имеется такая температура, называемая **точкой Кюри** ( $T_K$ ), выше которой это вещество теряет свои особые магнитные свойства.

Наличие температуры Кюри связано с разрушением при  $T > T_K$  упорядоченного состояния в магнитной подсистеме кристалла – параллельной ориентации магнитных моментов. Для никеля температура Кюри равна  $360\text{ }^\circ\text{C}$ . Если повесить образец никеля вблизи пламени горелки так, чтобы он находился в поле сильного постоянного магнита, то ненагретый образец может располагаться горизонтально, сильно притягиваясь к магниту (рис. 2.7.10). По мере нагрева образца и достижения температуры  $T > T_K$  ферромагнитные свойства у никеля исчезают и образец никеля падает. Остыв до температуры ниже точки Кюри, образец вновь притянется к магниту. Нагревшись, вновь падает и т.д., колебания будут продолжаться все время, пока горит свеча.

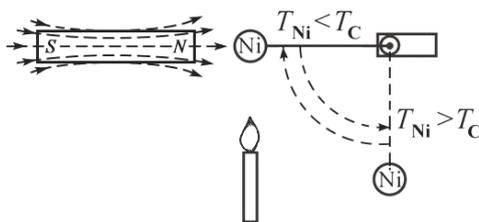


Рис. 2.7.10

### 5. Существование магнитного гистерезиса.

На рис. 2.7.11 показана **петля гистерезиса** – график зависимости намагниченности вещества от напряженности магнитного поля  $H$ .

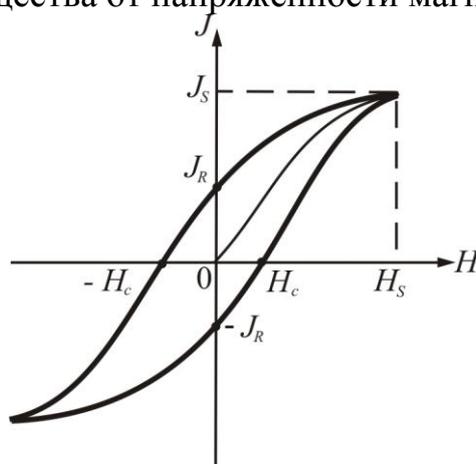


Рис. 2.7.11

Намагниченность  $J_S$  при  $H = H_S$  называется **намагниченностью насыщения**.

Намагниченность  $\pm J_R$  при  $H = 0$  называется **остаточной намагниченностью** (что необходимо для создания постоянных магнитов).

**Напряженность  $\pm H_c$  магнитного поля, полностью размагниченного ферромагнетика, называется коэрцитивной силой.** Она характеризует способность ферромагнетика сохранять намагниченное состояние.

Большой коэрцитивной силой (широкой петлей гистерезиса) обладают **магнитотвердые материалы**. Малую коэрцитивную силу имеют **магнитомягкие материалы**.

Измерение гиромангнитного отношения для ферромагнетиков показало, что элементарными носителями магнетизма в них являются спиновые магнитные моменты электронов.

Самопроизвольно, при  $T < T_K$ , намагничиваются лишь очень маленькие монокристаллы ферромагнитных материалов, например никеля или железа. Для того чтобы постоянным магнитом стал большой кусок

железа, необходимо его намагнитить, т.е. поместить в сильное магнитное поле, а затем это поле убрать. Оказывается, что при  $T < T_K$  большой исходный кусок железа разбит на множество очень маленьких ( $10^{-2} - 10^{-3}$  см), полностью намагниченных областей – доменов. Векторы намагниченности доменов в отсутствие внешнего магнитного поля ориентированы таким образом, что полный магнитный момент ферромагнитного материала равен нулю. Если бы в отсутствие поля кристалл железа был бы единым доменом, то это привело бы к возникновению значительного внешнего магнитного поля, содержащего значительную энергию (рис. 2.7.12, а). Разбиваясь на домены, ферромагнитный кристалл уменьшает энергию магнитного поля. При этом, разбиваясь на ко-соугольные области (рис. 2.7.12, б), можно легко получить состояние ферромагнитного кристалла, из которого магнитное поле вообще не выходит. В целом в монокристалле реализуется такое разбиение на доменные структуры, которое соответствует минимуму свободной энергии ферромагнетика. Если поместить ферромагнетик, разбитый на домены, во внешнее магнитное поле, то в нем начинается движение доменных стенок. Они перемещаются таким образом, чтобы областей с ориентацией вектора намагниченности по полю стало больше, чем областей с противоположной ориентацией (рис. 2.7.12, в, г). Такое движение доменных стенок понижает энергию ферромагнетика во внешнем магнитном поле. По мере нарастания магнитного поля весь кристалл превращается в один большой домен с магнитным моментом, ориентированным по полю (рис. 2.7.12, а).

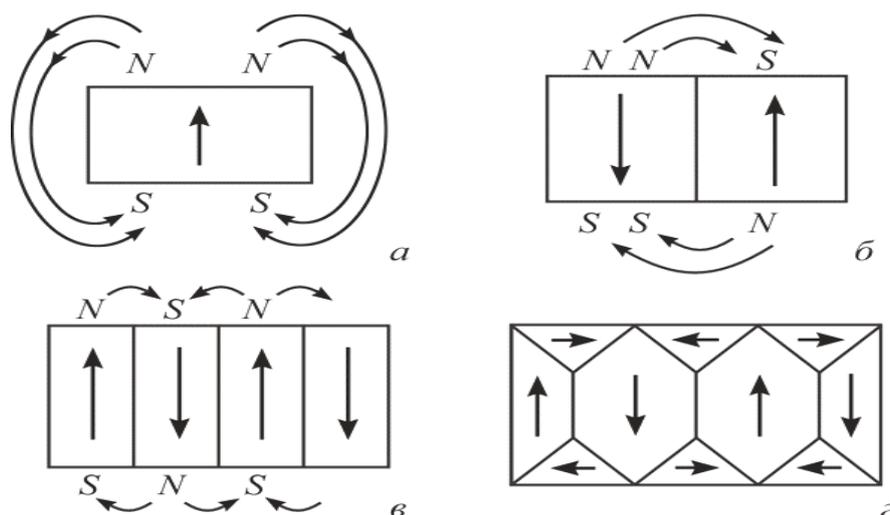


Рис. 2.7.12

Ферромагнитные материалы играют огромную роль в самых различных областях современной техники. *Магнитомягкие материалы* используются в электротехнике при изготовлении трансформаторов, электромоторов, генераторов, в слаботочной технике связи и радиотехнике; *магнитожесткие материалы* применяют при изготовлении постоянных магнитов.

Широкое распространение в радиотехнике, особенно в высокочастотной радиотехнике, получили ферриты ( $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ), сочетающие ферромагнитные и полупроводниковые свойства.

### Контрольные вопросы. Упражнения

1. Почему орбитальный магнитный и механический моменты электрона в атоме противоположно направлены?
2. Что называют гиромагнитным отношением?
3. Из каких магнитных моментов складывается магнитный момент атома?
4. Можно ли провести аналогию между намагничиванием диамагнетика и поляризацией диэлектрика с неполярными молекулами?
5. Можно ли провести аналогию между намагничиванием парамагнетика и поляризацией диэлектрика с полярными молекулами?
6. Что такое диамагнетики? парамагнетики? В чем различие их магнитных свойств?
7. Что такое намагниченность? Какая величина может служить ее аналогом в электростатике?
8. Запишите и объясните соотношения между магнитными проницаемостью и восприимчивостью для парамагнетика; для диамагнетика.
9. Выведите соотношение между векторами магнитной индукции, напряженности магнитного поля и намагниченности.
10. Объясните физический смысл циркуляции по произвольному замкнутому контуру векторов: 1)  $\vec{B}$ ; 2)  $\vec{H}$ ; 3)  $\vec{J}$
11. Выведите и прокомментируйте условия для векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  на границе раздела двух магнетиков.
12. Проанализируйте теорему о циркуляции вектора  $\vec{B}$  в веществе.
13. Объясните петлю гистерезиса ферромагнетика. Что такое магнитострикция?
14. Какие ферромагнетики являются магнитомягкими? магнитожесткими? Где их применяют?
15. Каков механизм намагничивания ферромагнетиков?
16. Какую температуру для ферромагнетика называют точкой Кюри?

## 2.8. Уравнения Максвелла

### 2.8.1. Закон полного тока

Если в каком-либо проводнике течет переменный ток – ток проводимости, то внутри есть и переменное электрическое поле, т.е. ток смещения.

Магнитное поле проводника определяется *полным током*:

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j}_{\text{пров}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}_{\text{пров}} + \vec{j}_{\text{см}}. \quad (2.8.1)$$

В зависимости от электропроводности среды и частоты (поля) оба слагаемых играют разную роль:

- в *металлах* и на низких частотах  $j_{\text{см}} \ll j_{\text{пров}}$  (в скин-эффекте  $j_{\text{см}}$  не играет заметной роли);
- в *диэлектриках* и на высоких частотах  $j_{\text{см}}$  играет основную роль.

Оба члена в уравнении полного тока могут иметь одинаковые знаки и противоположные. Поэтому  $j_{\text{полн}}$  может быть как больше, так и меньше тока проводимости или равен нулю.

Если мы имеем разомкнутый проводник, то на его концах обрывается лишь ток проводимости. Поэтому если под током понимать полный ток, то окажется, что в природе все *переменные электрические токи – замкнуты*. Этот вывод сделан Дж. Максвеллом, выдающимся английским физиком-теоретиком.

### 2.8.2. Ток смещения

Если замкнуть ключ (рис. 2.8.1), то лампа при *постоянном* токе гореть не будет: емкость  $C$  разрывает цепь *постоянного* тока. Но вот в моменты включения лампа будет вспыхивать.

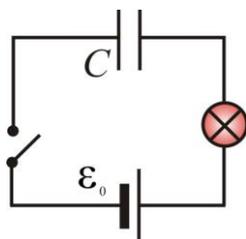


Рис. 2.8.1

При переменном токе – лампа горит, но, в то же время, нам ясно, что электроны из одной обкладки в другую не переходят – между ними изолятор (или вакуум). А вот если бы взять прибор, измеряющий магнитное поле, то в промежутке между обкладками мы обнаружили бы магнитное поле (рис. 2.8.2).

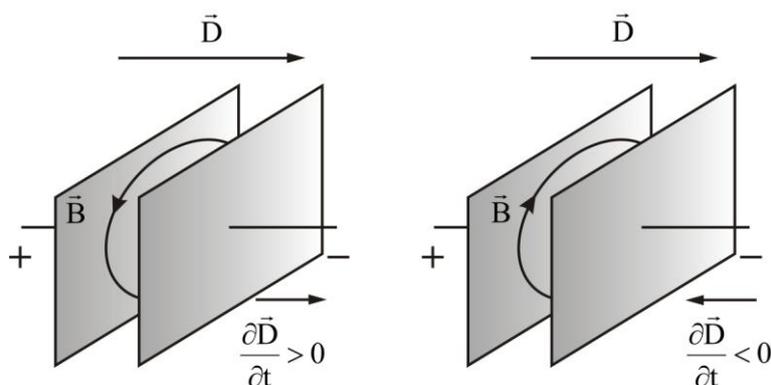


Рис. 2.8.2

Для установления количественных соотношений между изменяющимся электрическим полем и вызываемым им магнитным полем Максвелл ввел в рассмотрение **ток смещения**. Этот термин имеет смысл в таких веществах, как, например, диэлектрики. Там смещаются заряды под действием электрического поля. Но в вакууме зарядов нет – там смещаться нечему, а магнитное поле есть, т.е. название Максвелла «ток смещения» – не совсем удачное, но смысл, вкладываемый в него Максвеллом, – правильный.

Максвелл сделал вывод: всякое переменное электрическое поле порождает переменное магнитное поле.

Токи проводимости в проводнике замыкаются токами смещения в диэлектрике или в вакууме. Переменное электрическое поле в конденсаторе создает такое же магнитное поле, как если бы между обкладками существовал ток проводимости, имеющий величину, равную току в металлическом проводнике.

Это утверждение позволяет (на базе нашего примера с конденсатором) найти величину тока смещения. В свое время мы с вами доказали, что поверхностная плотность поляризационных зарядов  $\sigma$  равна  $\vec{D}$  – вектору электрического смещения:

$$\begin{aligned} \sigma &= E\varepsilon\varepsilon_0, \quad D = E\varepsilon\varepsilon_0, \\ D &= \sigma. \end{aligned} \tag{2.8.2}$$

Если ток смещения выразить через полный заряд на поверхности диэлектрика и, следовательно, на обкладках конденсатора  $q = \sigma S$  ( $S$  – площадь обкладки) –

$$I_{\text{см}} = \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial(\sigma S)}{\partial t},$$

тогда

$$I_{\text{см}} = S \frac{\partial D}{\partial t}, \quad (2.8.3)$$

т.е. ток смещения пропорционален скорости изменения вектора электрического смещения  $\vec{D}$ . Поэтому он и получил такое название – ток смещения.

Плотность тока смещения

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (2.8.4)$$

Вихревое магнитное поле ( $\vec{B}$ ), образующееся при протекании тока смещения, связано с направлением вектора  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  правилом правого винта.

Из чего складывается ток смещения?

Из раздела «Электростатика и постоянный ток» известно, что относительная диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon = 1 + \chi$ , где  $\chi$  – диэлектрическая восприимчивость среды. Тогда

$$D = \epsilon \epsilon_0 E = (1 + \chi) \epsilon_0 E,$$

или

$$D = \epsilon_0 E + \epsilon_0 E \chi.$$

Отсюда видно, что  $\epsilon_0 \chi E = \vec{P}_l$  – вектор поляризации. Следовательно,

$$\vec{j}_{\text{см}} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}_l}{\partial t}. \quad (2.8.5)$$

В этой формуле  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  – плотность тока смещения в вакууме;  $\frac{\partial \vec{P}_l}{\partial t}$  – плотность тока поляризации, т.е. плотность тока, обусловленная перемещением зарядов в диэлектрике.

### 2.8.3. Единая теория электрических и магнитных явлений. Система уравнений Максвелла

Итак, переменное магнитное поле вызывает появление вихревого электрического поля. Переменное электрическое поле вызывает появление магнитного поля. Взаимно порождаясь, они могут существовать независимо от источников заряда или токов, которые первоначально создали одно из них. В сумме это есть электромагнитное поле (ЭМП). Превращение одного поля в другое и распространение в пространстве есть способ существования ЭМП. Конкретные проявления ЭМП – радиоволны, свет, гамма-лучи и т.д.

В 1860 г. знаменитый английский физик Джеймс Клерк Максвелл создал единую теорию электрических и магнитных явлений, в которой он использовал понятие *ток смещения*, дал *определение ЭМП* и предсказал существование в свободном пространстве *электромагнитного излучения*, которое распространяется со скоростью света.

Теорию ЭМП Максвелл сформулировал в виде системы нескольких уравнений. В учении об электромагнетизме эти уравнения Максвелла играют такую же роль, как уравнения (или законы) Ньютона в механике.

**Уравнение 1.** Мы знаем теорему о циркуляции вектора напряжённости магнитного поля:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum I_i = I_{\text{пр}} + I_{\text{см}} = I_{\text{макро}} + I_{\text{см}},$$

но  $I_{\text{см}} = \int_S \frac{d\vec{D}}{dt} d\vec{S}$ ;  $dI_{\text{пр}} = \vec{j} dS$ ; т.е.  $I_{\text{пр}} = \int_S \vec{j} dS$ , тогда

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}. \quad (2.8.6)$$

Это уравнение является *обобщением закона Био – Савара – Лапласа* и показывает, что циркуляция вектора  $\vec{H}$  по произвольному замкнутому контуру  $L$  равна сумме токов проводимости и токов смещения сквозь поверхность, натянутую на этот контур, и, другими словами, показывает связь между полным током и порождаемым им магнитным полем.

В дифференциальной форме это уравнение Максвелла выглядит так:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

$$\text{где } \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{i} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right).$$

**Уравнение 2.** Рассматривая явление электромагнитной индукции, мы сделали вывод, что ЭДС индукции  $\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E}'_l d\vec{l}$ . Перейдем от вихревого электрического поля к магнитному:

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{E}'_l d\vec{l} = \mathcal{E}_i &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} = -\int_S \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{S}, \\ \oint_L \vec{E}'_l d\vec{l} &= -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \end{aligned} \quad (2.8.7)$$

Это уравнение описывает явление электромагнитной индукции (закон Фарадея) и устанавливает количественную связь между электрическими и магнитными полями: *переменное электрическое поле порождает переменное магнитное поле*. В этом физический смысл уравнения.

В дифференциальной форме это уравнение выглядит так:

$$\operatorname{rot} \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Различие в знаках этого уравнения Максвелла соответствует закону сохранения энергии и правилу Ленца. Если бы знаки при  $\frac{d\vec{B}}{dt}$  и  $\frac{d\vec{D}}{dt}$  были одинаковы, то бесконечно малое увеличение одного из полей вызвало бы неограниченное увеличение обоих полей, а бесконечно малое уменьшение одного из полей приводило бы к полному исчезновению обоих полей, т.е. различие в знаках является необходимым условием существования устойчивого ЭМП.

**Уравнение 3.** Ещё два уравнения выражают теорему Остроградского – Гаусса для электрического и магнитного полей (статических полей):

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV. \quad (2.8.8)$$

*Поток вектора электрического смещения  $\vec{D}$  через замкнутую поверхность  $S$  равен сумме зарядов внутри этой поверхности.* Это урав-

нение показывает также, что *силовые линии вектора  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  начинаются и заканчиваются на зарядах.*

В дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho,$$

где 
$$\operatorname{div} \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}.$$

**Уравнение 4.** Для магнитного поля

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (2.8.9)$$

*Это уравнение выражает то свойство магнитного поля, что линии вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  всегда замкнуты и что магнитных зарядов нет.*

В дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (2.8.10)$$

**Уравнения 5, 6, 7.** Наконец надо помнить, что величины, входящие в эти четыре уравнения, зависимы и между ними существует связь:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}; \quad (2.8.11)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}; \quad (2.8.12)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} + \vec{j}_{\text{стр}}, \quad (2.8.13)$$

здесь  $\sigma$  – удельная проводимость;  $\vec{j}_{\text{стр}}$  – плотность сторонних токов.

Эти уравнения называются **уравнениями состояния** или **материальными уравнениями**. Вид этих уравнений определяется электрическими и магнитными свойствами среды. В общем случае уравнения состояния очень сложны и нелинейны.

Уравнения (2.8.6) – (2.8.13) составляют **полную систему уравнений Максвелла**. Они являются наиболее общими для электрических и магнитных полей в покоящихся средах. Уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразований Лоренца. Физический смысл уравнений Максвелла в дифференциальной и интегральной формах полностью эквивалентен.

Полная система уравнений Максвелла в дифференциальной и интегральной формах имеет вид, приведенный в таблице 3.

Таблица 3

№	Название	Дифференциальная форма	Интегральная форма	Физический смысл
1	Закон индукции Фарадея	$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\oint_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$	Вихревое электрическое поле порождается изменением магнитной индукции и наоборот
2	Обобщенный закон Био – Саварра – Лапласа	$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$	$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = I_{\text{encl}} + \oint_S \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$	Вихревое магнитное поле порождается электрическим током и изменением электрической индукции
3	Теорема Гаусса для вектора $\vec{D}$	$\text{div}\vec{D} = \rho$	$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = q_{\text{encl}}$	Электрический заряд является источником электростатического поля
4	Теорема Гаусса для вектора $\vec{B}$	$\text{div}\vec{B} = 0$	$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0$	Магнитная индукция не расходится (нет магнитных зарядов)
5	Электростатическая индукция	$\vec{D} = \epsilon_0\epsilon\vec{E}$	Связь электрической индукции с напряженностью электростатического поля	
6	Магнитная индукция	$\vec{B} = \mu_0\mu\vec{H}$	Связь магнитной индукции с напряженностью магнитного поля	
7	Плотность тока	$\vec{j} = \sigma\vec{E}$	Связь плотности тока с напряженностью электростат. поля (Закон Ома в диф. форме)	

#### 2.8.4. Пояснение к теории классической электродинамики

Теория Максвелла это последовательная теория единого электромагнитного поля (ЭМП), создаваемого произвольной системой зарядов и токов. В этой теории решается основная задача электродинамики – по заданному распределению зарядов и токов отыскиваются характеристики электрического и магнитного полей. Эта теория явилась обобщением важнейших законов, описывающих электрические и магнитные явления (аналогично уравнениям Ньютона и началам термодинамики).

В теории Максвелла рассматриваются макроскопические поля, которые создаются макрочарядами и макротоками. Расстояния от источников полей до рассматриваемых точек много больше размеров атомов.

Периоды изменения переменных электрических и магнитных полей много больше периодов внутренних процессов.

Теория Максвелла имеет феноменологический характер. В ней не рассматривается внутренний механизм явлений в среде. Среда описывается с помощью трёх величин –  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\sigma$ .

Теория Максвелла является теорией близкодействия, согласно которой электрические и магнитные взаимодействия, происходящие в электрических и магнитных полях, распространяются с конечной скоростью, равной скорости света в данной среде.

### 2.8.5. Скорость распространения ЭМП

Как только Максвелл понял, что существует единое ЭМП, которое может существовать независимо от источника, он вычислил скорость распространения этого ЭМП.

Магнитное поле, создаваемое зарядом, движущимся в вакууме со скоростью  $\vec{v}$ , равно (из закона Био – Савара – Лапласа)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (2.8.14)$$

Но точечный заряд создаёт и электрическое поле на расстоянии  $r$ :

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (2.8.15)$$

Умножая (2.8.14) на  $\frac{\epsilon_0}{\epsilon_0}$  и сравнивая (2.8.14) с (2.8.15), можно запи-

сать:

$$\vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 [\vec{v}, \vec{E}].$$

Заряд движется со скоростью  $\vec{v}$ , но вместе с ним движется и электрическое поле с той же скоростью. Поскольку поле перемещается, следовательно, оно переменное, а переменное электрическое поле создает переменное магнитное поле. Тогда

$$\vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 [\vec{v}_E, \vec{E}],$$

где  $\vec{v}_E = \vec{v}$  – скорость распространения электрического поля.

С другой стороны, при рассмотрении явления электромагнитной индукции мы получили, что магнитное поле  $\vec{B}$ , двигаясь со скоростью  $\vec{v}_B$ , порождает вихревое электрическое поле  $\vec{E}'$ :

$$\vec{E}' = -[\vec{v}_B, \vec{B}].$$

Если переменное электрическое и магнитное поля порождают друг друга, то они обязаны двигаться с одинаковой скоростью (в противном

случае явление электромагнитной индукции и ток смещения мы наблюдали бы от случая к случаю, изредка, а не всегда, в любом случае).

Итак,  $\vec{v}_E = \vec{v}_B = \vec{v}_{\text{ЭМП}}$ .

Теперь, заменив  $\vec{B}$  на  $\vec{H}$ , можно записать:

$$\vec{E}' = -[\vec{v}_B, \vec{B}'] = -\mu_0[\vec{v}, \vec{H}] = \mu_0[\vec{H}, \vec{v}];$$

$$\vec{B}' = \mu_0 \epsilon_0 [\vec{v}, \vec{E}']; \quad (2.8.16)$$

$$\vec{H}' = \epsilon_0 [\vec{v}, \vec{E}'] \quad (2.8.17)$$

(знак «'» указывает, что одно поле порождает другое и наоборот).

Поскольку вектор, выражаемый векторным произведением, всегда перпендикулярен к обоим перемножаемым векторам, то из (2.8.16) и (2.8.17) следует, что векторы  $\vec{v}$ ,  $\vec{E}'$ ,  $\vec{H}'$  взаимно перпендикулярны (рис. 2.8.3).

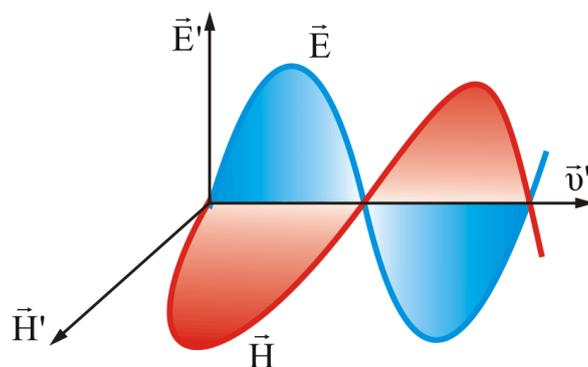


Рис. 2.8.3

При этом все три вектора образуют правовинтовую систему в направлении распространения:

$$\vec{E}' \rightarrow \vec{H}' \rightarrow \vec{v}.$$

Так как векторы взаимно перпендикулярны, то

$$\sin(\vec{v}, \vec{E}') = \sin(\vec{H}', \vec{v}) = \sin 90^\circ = 1.$$

Тогда абсолютные значения векторов

$$E' = H' v \mu_0 \quad \text{и} \quad H' = E' v \epsilon_0,$$

или  $E' H' = H' v \mu_0 \epsilon_0 v E' = 1$ , следовательно,

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c;$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1} \text{ – это и есть скорость}$$

распространения ЭМП в вакууме, и равна она скорости света  $c$ .

При распространении ЭМП в среде

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}},$$

а т.к. в среде  $\epsilon > 1$  и  $\mu > 1$ , то всегда скорость света в среде меньше скорости света в вакууме, т.е.  $v < c$ .

В отличие от других форм материи ЭМП не может находиться в состоянии покоя. Оно всегда движется, причём в вакууме скорость распространения ЭМП всегда равна  $c$ , независимо от системы отсчёта.

### 2.8.6. Релятивистская трактовка магнитных явлений (общие положения)

Взаимодействие точечных неподвижных зарядов полностью описывается законом Кулона. Однако закона Кулона недостаточно для анализа взаимодействия движущихся зарядов. Такой вывод следует не из конкретных особенностей кулоновского взаимодействия, а обусловливается релятивистскими свойствами пространства и времени, релятивистскими уравнениями движения.

Релятивистское уравнение движения имеет одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчёта:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \quad (2.8.18)$$

Требования релятивистской инвариантности уравнения движения приводят к тому, что силы оказываются связанными определенными соотношениями при переходе от одной ИСО к другой. Причём из формулы преобразования сил следует неизбежная зависимость силы от скорости в релятивистской теории.

***Магнитное поле является релятивистским эффектом, вытекающим из инвариантности заряда и релятивистского закона преобразования сил.***

Кроме кулоновской силы  $\vec{F}_1$ , на движущийся заряд действует другая сила, отличающаяся от кулоновской. Она возникает в результате движения зарядов и называется ***магнитной***. То есть движение зарядов создаёт в пространстве магнитное поле, или на движущийся заряд со стороны магнитного поля действует сила  $\vec{F}_2$ .

Из сравнения  $\vec{B}_q$  и  $\vec{E}_q$  видно, что, при  $v < c$ ,  $\vec{F}_2$  является величиной второго порядка малости относительно  $\vec{F}_1$  – силы кулоновского взаимодействия.

Следовательно, магнитное взаимодействие сравнимо с электрическим по величине лишь при достаточно больших скоростях ( $v \approx c$ ) заряженных частиц.

Таким образом, при  $v \ll c$ ,  $F_2 \ll F_1$ , при  $v \approx c$ ,  $F_2 \approx F_1$ .

Полную силу, действующую на заряд  $q_0$  со стороны заряда  $q$  в системе  $K$ , можно записать как:

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}_q + q_0 [\vec{U}, \vec{V}_q].$$

Таким образом, *магнитное поле мы ввели, исходя из инвариантности заряда и релятивистского закона преобразования сил.*

*СТО вскрывает физическую природу магнетизма, как релятивистский эффект.*

*Рассмотренное нами поле заряда  $q$  может быть и чисто электрическим, и одновременно электрическим и магнитным, в зависимости от того, в какой системе отсчёта мы его наблюдаем.*

Это обстоятельно подчеркивает единство электромагнитного поля, а проведённые нами выкладки свидетельствуют, что основным законом электричества и магнетизма является закон Кулона. Все остальные законы магнитостатики могут быть получены из закона Кулона, инвариантности заряда и релятивистского закона преобразования сил (полей).

### Контрольные вопросы. Упражнения

1. Сформулируйте закон полного тока. Что такое ток смещения?
2. Что является причиной возникновения вихревого электрического поля? Чем оно отличается от электростатического поля?
3. Чему равна циркуляция вихревого электрического поля?
4. Почему вводится понятия тока смещения? Что он собой по существу представляет?
5. Выведите и объясните выражение для плотности тока смещения.
6. Запишите, объяснив физический смысл, обобщенную теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля.
7. Запишите полную систему уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной форме и объясните их физический смысл.
8. Почему постоянные электрические и магнитные поля можно рассматривать обособленно друг от друга? Запишите для них уравнения Максвелла в обеих формах.
9. Почему уравнения Максвелла в интегральной форме являются более общими?
10. Какие основные выводы можно сделать на основе теории Максвелла? Релятивистская трактовка теории.
11. Приведите и проанализируйте систему уравнений Максвелла.

### 3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

#### 3.1. Электрические колебания

##### 3.1.1. Квазистационарные токи

При рассмотрении электрических колебаний приходится иметь дело с токами, изменяющимися во времени. Закон Ома и вытекающие из него правила Кирхгофа были установлены для постоянного тока. Однако они остаются справедливыми и для мгновенных значений изменяющегося тока и напряжения, если их изменения происходят не слишком быстро. Электромагнитные сигналы распространяются по цепи со скоростью света  $c$ . Пусть  $l$  – длина электрической цепи. Тогда время распространения сигнала в данной цепи  $t = l/c$ . Если  $t \ll T$  ( $T$  – период колебаний электрического тока), то такие токи называются *квазистационарными*. При этом условии мгновенное значение силы тока во всех участках цепи будет постоянным. Для частоты  $f = 50$  Гц условие квазистационарности выполняется при длине цепи  $\sim 100$  км.

Рассматривая в дальнейшем электрические колебания, мы будем считать, что токи квазистационарны.

##### 3.1.2. Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления

В цепи, содержащей индуктивность  $L$  и ёмкость  $C$ , могут возникать электрические колебания. Такая цепь называется *колебательным контуром* (рис. 3.1.1).

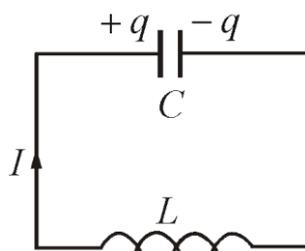


Рис. 3.1.1

Колебания в контуре можно вызвать, либо зарядив конденсатор, либо вызвав в индуктивности ток (например, включив магнитное поле).

Поскольку активное сопротивление контура  $R = 0$ , полная энергия остаётся постоянной. Если энергия конденсатора равна нулю, то энергия магнитного поля максимальна, и наоборот. Рассмотрим процессы,

происходящие в колебательном контуре, в сравнении с колебаниями маятника (рис. 3.1.2).

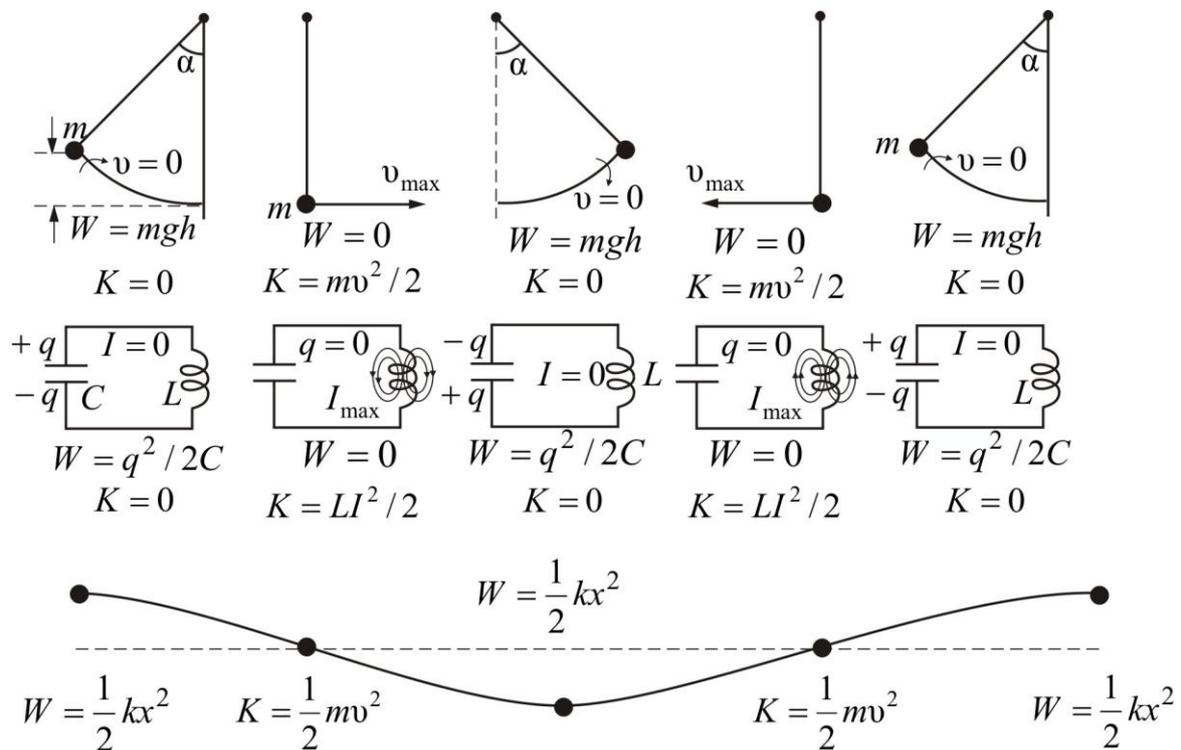


Рис. 3.1.2

Из сопоставления электрических и механических колебаний (рис. 3.1.2) следует, что энергия электрического поля  $W = \frac{q^2}{2C}$  аналогична потенциальной энергии  $mgh$  или  $1/2kx^2$ , а энергия магнитного поля  $\frac{LI^2}{2}$  аналогична кинетической энергии  $\frac{mv^2}{2}$ ;  $L$  играет роль массы  $m$ ;  $1/C$  – роль коэффициента жесткости  $k$ . Наконец, заряду  $q$  соответствует смещение маятника из положения равновесия  $x$ , силе тока  $I$  – скорость  $v$ , а напряжению  $U$  – ускорение  $a$ .

Ниже мы увидим, что эта аналогия сохраняется и в математических уравнениях. В соответствии со вторым законом Кирхгофа (и законом сохранения энергии) можно записать:

$$\frac{q}{C} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (3.1.1)$$

Но, т.к.  $I = \frac{dq}{dt}$ ,  $\xi_i = -L \frac{dI}{dt}$ , тогда получим  $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$ .

Введем обозначение:  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  – *собственная частота контура*,  
отсюда получим *основное уравнение колебаний в контуре* –

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0. \quad (3.1.2)$$

Решением этого уравнения является выражение вида

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (3.1.3)$$

Таким образом, заряд на обкладке конденсатора изменяется по гармоническому закону с собственной частотой контура  $\omega_0$ .

Для периода колебаний справедлива *формула Томсона*

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC};$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (3.1.4)$$

Продифференцируем выражение (3.1.3) по времени и получим выражение для тока

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.1.5)$$

Напряжение на конденсаторе отличается от заряда на  $1/C$ :

$$U = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (3.1.6)$$

Таким образом, ток опережает по фазе напряжение на конденсаторе на  $\pi/2$ . На индуктивности, наоборот, напряжение опережает ток на  $\pi/2$ :

$$U_m = \frac{q_m}{C}; \quad I_m = \omega_0 q_m; \quad U_m C = \frac{I_m}{\omega_0};$$

$$U_m = I_m \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (3.1.7)$$

где  $\sqrt{\frac{L}{C}} = R_{\text{вол}}$  – волновое сопротивление [Ом].

Выражение (3.1.7) – это *закон Ома для колебательного контура*.

### 3.1.3. Свободные затухающие электрические колебания

Всякий реальный контур обладает активным сопротивлением (рис. 3.1.3). Энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется в этом сопротивлении на нагревание, вследствие чего колебания затухают.

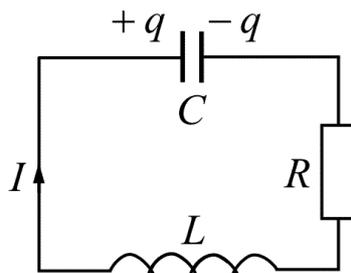


Рис. 3.1.3

По второму закону Кирхгофа

$$IR + \frac{q}{C} = -L \frac{dI}{dt}; \quad (3.1.8)$$

$$\frac{dq}{dt} R + \frac{q}{C} = -L \frac{d^2q}{dt^2},$$

или

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Пусть  $\beta = \frac{R}{2L}$  – коэффициент затухания и, учитывая, что собственная частота контура  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , получим **уравнение затухающих колебаний** в контуре с  $R$ ,  $L$  и  $C$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0. \quad (3.1.9)$$

При  $\beta \leq \omega_0$ , т.е.  $\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , решение этого уравнения имеет вид

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – частота затухающих колебаний контура, или

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \text{ т.е. } \omega < \omega_0.$$

На рис. 3.1.4 показан вид затухающих колебаний заряда  $q$  и силы тока  $I$ . Если сравнить электрические затухающие колебания с механическими (рис. 3.1.2), то хорошо видны общие закономерности этих явлений: колебаниям  $q$  соответствует  $x$  – смещение маятника из положения равновесия, силе тока  $I$  – скорость  $v$ .

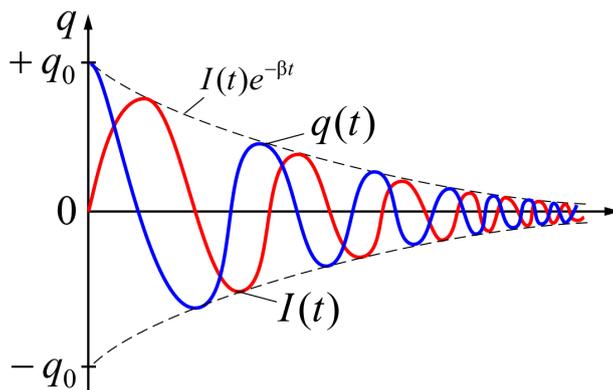


Рис. 3.1.4

Затухание принято характеризовать *логарифмическим декрементом затухания*  $\chi$ :

$$\chi = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T, \quad (3.1.10)$$

где  $A$  – амплитуда  $I$ ,  $U$ ,  $q$ .

Найдём выражение  $\chi$  для электрических колебаний. Так как

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega},$$

тогда

$$\chi = \beta T = \frac{\pi R}{L\omega}.$$

Поскольку  $R$ ,  $L$ ,  $\omega$  определяются параметрами контура, следовательно,  $\chi$  является *характеристикой контура*.

Если затухание невелико, т.е.  $\beta^2 \ll \omega_0^2$ , то  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , тогда

$$\chi = \frac{\pi R \sqrt{LC}}{L} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (3.1.11)$$

Колебательный контур часто характеризуют *добротностью*  $Q$ , которая определяется как величина, обратно пропорциональная  $\chi$ :  $Q = \frac{\pi}{\chi}$ ,

а т.к.  $\chi = \frac{1}{N}$ , где  $N$  – число колебаний, то  $Q = \pi N$ , т.е. *добротность*  $Q$  тем больше, чем больше колебаний успевают совершиться, прежде чем амплитуда уменьшится в  $e$  раз.

Добротность определяется и по-другому:

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}, \quad (3.1.12)$$

где  $W$  – энергия контура в данный момент;  $\Delta W$  – убыль энергии за один период, следующий за этим моментом.

При  $\beta^2 \geq \omega_0^2$ , т.е. при  $\frac{R^2}{4L^2} \geq \frac{1}{LC}$ , происходит *апериодический разряд* (рис. 3.1.5).

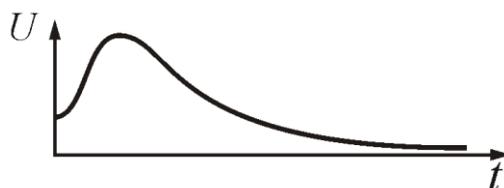


Рис. 3.1.5

Сопротивление контура, при котором колебательный процесс переходит в апериодический, называется *критическим сопротивлением*  $R_k$ . Найдем это сопротивление из равенства

$$\frac{R_k^2}{4L^2} = \frac{1}{LC},$$

отсюда

$$R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2R_{\text{вол}}, \quad (3.1.13)$$

где  $R_{\text{вол}}$  – волновое сопротивление, определяемое параметрами  $L$  и  $C$ .

### 3.1.4. Вынужденные электрические колебания. Резонанс

Чтобы вызвать вынужденные колебания, нужно оказывать на систему внешнее периодическое воздействие. Рассмотрим этот вопрос кратко, используя аналогию с механическими колебаниями.

К контуру, изображенному на рис. 3.1.6, подадим переменное напряжение  $U$ :

$$U = U_m \cos \omega t. \quad (3.1.14)$$

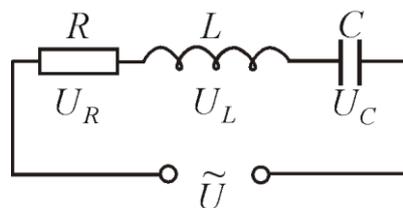


Рис. 3.1.6

Тогда уравнение (3.1.9) примет вид

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t. \quad (3.1.15)$$

Это **уравнение вынужденных электрических колебаний**, которое совпадает с аналогичным уравнением механических колебаний. Его решение имеет вид

$$q = q_m \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.1.16)$$

где

$$q_m = U_m / \omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = U_m / \omega \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}.$$

Величина  $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$  называется **полным сопротивлением цепи**, или **импедансом** (от лат. *impedio* – препятствую).

Импеданс представляет комплексное сопротивление для гармонических процессов  $Z = R + iX$ , где  $R$  – **активное сопротивление**, отвечающее за потерю мощности в цепи;  $X$  – **реактивное сопротивление**, определяющее величину энергии, пульсирующей в цепи с частотой  $2\omega$ ,

$$X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

На рис. 3.1.7 изображены идеальные элементы цепи и соответствующий им импеданс.

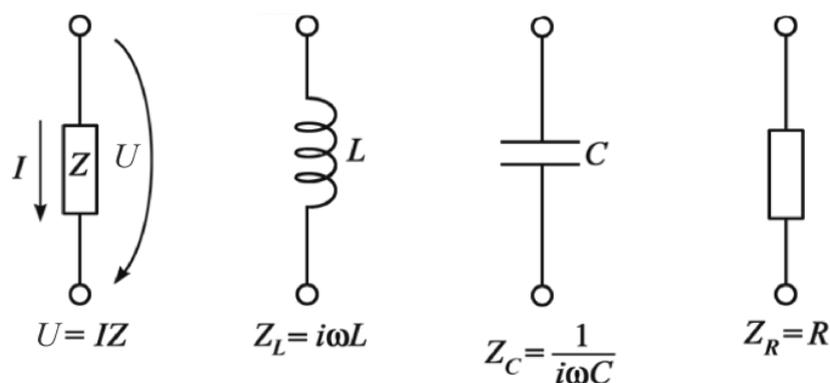


Рис. 3.1.7

### Резонанс напряжений

При последовательном соединении  $R$ ,  $L$ ,  $C$  в контуре (рис. 3.1.6), когда  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ , наблюдается **резонанс**. При этом угол сдвига фаз между током и напряжением обращается в нуль ( $\varphi = 0$ ).

**Резонансная частота** при напряжении на конденсаторе  $U_C$  равна

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad \text{и} \quad Z = R,$$

тогда  $U = U_R$ , а  $U_C$  и  $U_L$  одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе. Такой вид резонанса называется **резонансом напряжения**, или **последовательным резонансом**.

Резонансные кривые для напряжения  $U$  изображены на рис. 3.1.8. Они сходны с резонансными кривыми для ускорения  $a$  при механических колебаниях:

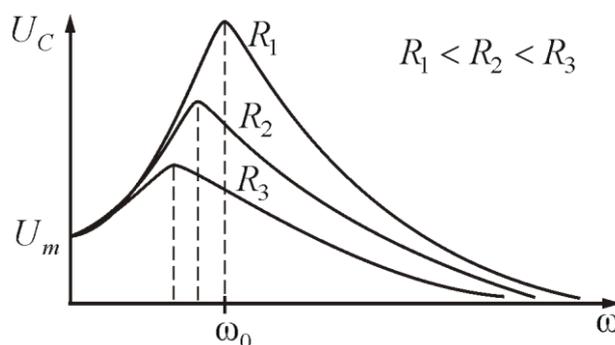


Рис. 3.1.8

Резонансные напряжения определяются выражением

$$U_{L_{\text{рез}}} = U_{C_{\text{рез}}} = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_m = QU_m.$$

Таким образом, при последовательном резонансе на ёмкости можно получить усиление напряжения с амплитудой  $QU \gg U$  в узком диапазоне частот. Этот эффект широко используется в различных усилительных устройствах.

### Резонанс токов

В цепях переменного тока, содержащих параллельно включенные ёмкость и индуктивность (рис. 3.1.9), наблюдается другой тип резонанса.

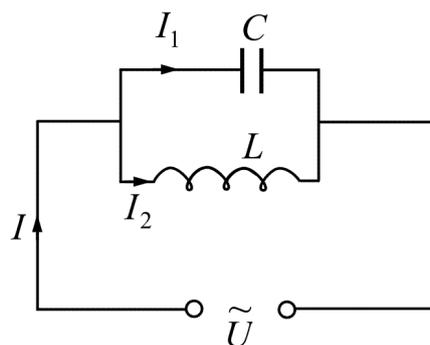


Рис. 3.1.9

Поскольку в таком контуре сопротивлением  $R$  можно пренебречь ( $R = 0$ ), то выражение для тока через емкость  $I_1$  примет вид

$$I_1 = I_{m1} \cos(\omega t - \varphi_1), \quad (3.1.17)$$

где  $I_{m1} = \frac{U_m}{1/\omega C}$ ;  $\text{tg } \varphi_1 = -\infty$ , т.к.  $\varphi_1 = \left(2n + \frac{3}{2}\right)\pi$ , а  $n = 1, 2, 3, \dots$

Аналогично для тока через индуктивность (при  $R = 0$ ,  $C = \infty$ )

$$I_2 = I_{m2} \cos(\omega t - \varphi_2), \quad (3.1.18)$$

где  $I_{m2} = \frac{U_m}{\omega L}$ ;  $\text{tg } \varphi_2 = +\infty$ , т.к.  $\varphi_2 = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Из сравнения (3.1.17) и (3.1.18) вытекает, что разность фаз в ветвях цепи  $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$ , т.е. токи противоположны по фазе:

$$I_m = |I_{m1} - I_{m2}| = U_m \left| \omega C - \frac{1}{\omega L} \right|. \quad (3.1.19)$$

Если  $\omega = \omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , то  $I_{m1} = I_{m2}$  и  $I_m = 0$ .

Резонансные кривые для тока изображены на рис. 3.1.10. Они соответствуют резонансным кривым для скорости при механических колебаниях.

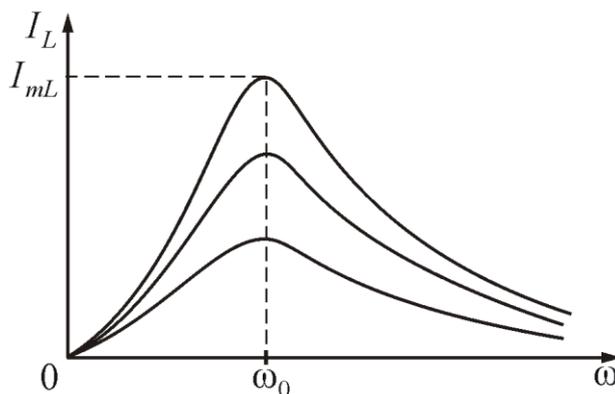


Рис. 3.1.10

Явление уменьшения амплитуды тока во внешней цепи и при этом **резкого увеличения тока в катушке индуктивности**, при приближении частоты приложенного напряжения  $\omega$  к  $\omega_{\text{рез}}$ , **называется резонансом токов**, или **параллельным резонансом**.

Резонанс токов используется в резонансных усилителях, приемниках, а также в индукционных печах для разогрева металла.

### 3.1.5. Мощность, выделяемая в цепи переменного тока

Мгновенное значение мощности переменного тока равно произведению мгновенного значения напряжения на силу тока:

$$P(t) = U(t)I(t),$$

где  $U(t) = U_m \cos \omega t$  и  $I(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)$ .

Раскрыв  $\cos(\omega t - \varphi)$ , получим

$$\begin{aligned} P(t) &= I_m U_m \cos(\omega t - \varphi) \cos \omega t = \\ &= I_m U_m (\cos^2 \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \cos \omega t - \sin \varphi). \end{aligned}$$

Практический интерес представляет не мгновенное значение мощности, а ее *среднее значение за период колебания*. Учитывая, что

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0,$$

получим

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi, \quad (3.1.20)$$

где  $U_m \cos \varphi = RI_m$ , поэтому среднее значение мощности будет равно

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} RI_m^2. \quad (3.1.21)$$

Такую же мощность развивает постоянный ток  $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ .

Величины  $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$  и  $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$  называются действующими (или эффективными) значениями тока и напряжения. Все амперметры и вольтметры градуируются по действующим значениям тока и напряжения.

Учитывая действующие значения тока и напряжения, выражение средней мощности (3.1.21) можно записать в виде

$$\langle P \rangle = IU \cos \varphi, \quad (3.1.22)$$

где множитель  $\cos \varphi$  называется **коэффициентом мощности**.

Формула (3.1.22) показывает, что мощность, выделяемая в цепи переменного тока, в общем случае зависит не только от силы тока и напряжения, но и от сдвига фаз между ними. Если в цепи реактивное сопротивление  $X$ , то  $\cos\varphi = 1$  и  $P = UI$ . Если цепь содержит только реактивное сопротивление ( $R = 0$ ), то  $\cos\varphi = 0$  и средняя мощность равна нулю, какими бы большими ни были ток и напряжение.

Если  $\cos\varphi$  имеет значение существенно меньше единицы, то для передачи заданной мощности при данном напряжении генератора нужно увеличивать силу тока  $I$ , что приводит либо к выделению джоулевой теплоты, либо потребует увеличения сечения проводов, что повышает стоимость линий электропередачи. Поэтому *на практике всегда стремятся увеличить  $\cos\varphi$* . Наименьшее допустимое значение  $\cos\varphi$  для промышленных установок составляет примерно 0,85.

### Контрольные вопросы. Упражнения

1. Почему возможен единый подход при изучении колебаний различной физической природы?
2. Что такое периодические процессы? гармонические колебания? свободные колебания?
3. Дайте определения амплитуды, фазы, периода, частоты, циклической частоты колебания.
4. Приведите формулы для скорости и ускорения гармонически колеблющейся точки.
5. Как связаны амплитуда и начальная фаза гармонических механических колебаний?
6. Какие формулы для кинетической, потенциальной и полной энергии при гармонических колебаниях?
7. Что называется гармоническим осциллятором? пружинным маятником? физическим? математическим?
8. Приведите формулы для периодов колебаний пружинного, физического и математического маятников.
9. Что такое приведенная длина физического маятника?
10. Какие процессы происходят при свободных гармонических колебаниях в колебательном контуре? Чем определяется их период?
11. Запишите и проанализируйте дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний в контуре.
12. Какова траектория точки, участвующей одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях с одинаковыми периодами? Как получается окружность? прямая?

13. Запишите дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение. Проанализируйте их для механических и электромагнитных колебаний.

14. По какому закону изменяется амплитуда затухающих колебаний? Являются ли затухающие колебания периодическими?

15. Что такое коэффициент затухания? декремент затухания? логарифмический декремент затухания? В чем заключается физический смысл этих величин?

16. При каких условиях наблюдается аperiodическое движение?

17. Что такое вынужденные колебания? Запишите дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение. Проведите аналогию для механических и электромагнитных колебаний.

18. Нарисуйте и проанализируйте резонансные кривые для амплитуды смещения (заряда) и скорости (тока). В чем их аналогия?

19. Почему добротность является важнейшей характеристикой резонансных свойств системы?

20. Чему равен сдвиг фаз между смещением и вынуждающей силой при резонансе?

21. Что называется резонансом? Какова его роль?

22. От чего зависит индуктивное сопротивление? емкостное сопротивление? Что называется реактивным сопротивлением?

23. Какие характерные признаки резонанса напряжений, резонанса токов? Приведите графики резонанса токов и напряжений.

24. Проведите аналогию механических и электромагнитных колебаний.

25. Как вычислить мощность, выделяемую в цепи переменного тока? Что называется коэффициентом мощности?

## 3.2. Электромагнитные волны

### 3.2.1. Генерация электромагнитных волн

Возможность существования электромагнитных волн предсказывал еще Майкл Фарадей в 1832 г., обобщая известные к тому времени данные по изучению электричества и магнетизма. Теоретически обосновал это предположение английский физик Дж. Максвелл.

В своей теории Максвелл дал определение электромагнитного поля и предсказал новый эффект: существование в свободном пространстве электромагнитного излучения (электромагнитных волн) и его распространение в пространстве со скоростью света. Теоретически вычислил давление света.

Из теории Максвелла следует, что изменяющееся электрическое поле порождает в пустом пространстве магнитное поле. Изменяющееся магнитное поле приводит, в свою очередь, к появлению изменяющегося электрического поля и т.д. Анализируя свои уравнения, Максвелл пришел к заключению, что конечным итогом подобной связи изменяющихся полей будет появление волны, которая содержит электрическое и магнитное поля и способна распространяться в пустом пространстве.

Впервые электромагнитные волны были обнаружены в 1887 г. Генрихом Герцем, который в качестве источника электромагнитных колебаний использовал колебательный контур.

В колебательном контуре, образованном конденсатором  $C$  и катушкой  $L$  (рис. 3.2.1, *а*), электрическое поле сосредоточено в зазоре между обкладками, а магнитное – внутри катушки.

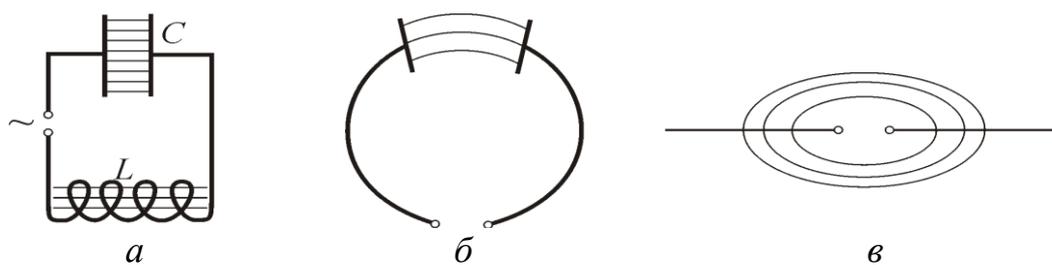


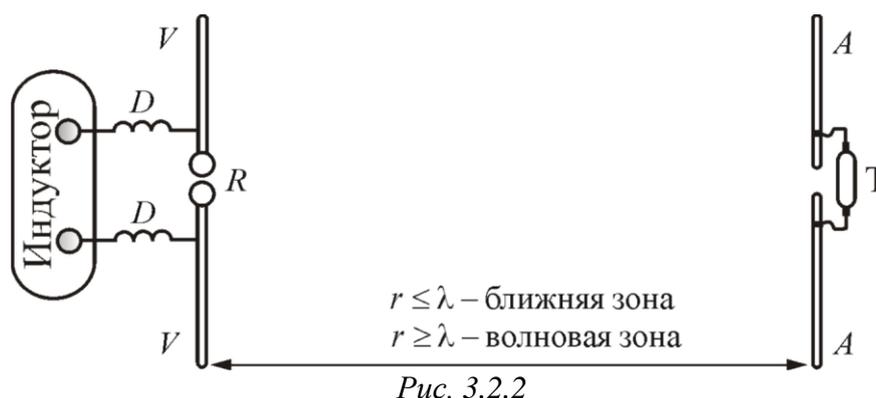
Рис. 3.2.1

В окружающем конденсатор и катушку пространстве поля практически равны нулю, поэтому заметного излучения электромагнитных волн не происходит. Для того чтобы контур излучал волны, необходимо увеличить расстояние между обкладками конденсатора и между витками катушки. В пределе мы приходим к прибору, названному впоследствии **вибратором Герца**. В процессе видоизменений, изображенных на рис. 3.2.1, *б*, *в*, сильно уменьшается емкость и индуктивность контура,

что также выгодно, т.к. приводит к увеличению частоты колебаний, а следовательно, к уменьшению длины волны. С волнами меньшей длины легче экспериментировать. В своих исследованиях Герц достиг частот порядка  $10^8$  Гц и получил волны, длина которых составляла от 10 до 0,6 м.

Вибратор Герца имел несколько модификаций. В одной из них (рис. 3.2.2) он состоял из двух одинаковых металлических стержней  $V - V$ , разделенных регулируемым искровым промежутком  $R$  и соединенных через дроссели  $D$  с индуктором – источником высокого напряжения.

Когда напряжение на искровом промежутке достигало пробойного значения, он пробивался электрической искрой, замыкающей обе половины вибратора. В вибраторе возникали затухающие электрические колебания высокой частоты. Максимальной интенсивностью обладали колебания с пучностью тока посередине вибратора и с длиной волны, равной примерно удвоенному расстоянию между концами вибратора (полуволновой вибратор). Уходу колебаний в индуктор препятствовали дроссели, соединяющие элементы вибратора с индуктором.



Для обнаружения электромагнитных волн Герц использовал *резонаторы* в виде проволочной рамки и иных форм. Наиболее простым являлся резонатор  $A - A$  (рис. 3.2.2), по форме повторяющий излучающий вибратор, а поэтому имеющий те же собственные частоты колебаний.

Когда электромагнитная волна достигает резонатора, она возбуждает в нем токи. Появление этих токов сопровождается проскакиванием искры в маленьком зазоре в центре резонатора или возбуждением свечения в небольшой газоразрядной трубке  $T$ , подключенной к обеим половинкам резонатора.

Таким образом, *ЭВМ генерируются колеблющимися, т.е. движущимися с ускорением, электрическими зарядами*. Справедливо

и такое утверждение: *движущийся с ускорением электрический заряд испускает электромагнитные волны.*

### 3.2.2. Дифференциальные уравнения ЭМВ

Одним из важнейших следствий уравнений Максвелла является существование ЭМВ. Можно показать, что для однородной и изотопной среды вдали от зарядов и токов, создающих электромагнитное поле, из уравнений Максвелла следует, что *векторы напряженности  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  электромагнитного поля удовлетворяют волновым уравнениям типа*

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{и} \quad \nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (3.2.1)$$

Всякая функция, удовлетворяющая уравнениям (3.2.1), описывает некоторую волну. Следовательно, электромагнитные поля действительно могут существовать в виде ЭМВ.

Фазовая скорость ЭМВ определяется выражением

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}, \quad (3.2.2)$$

где  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  – скорость света в вакууме;  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  – электрическая

и магнитная постоянные;  $\epsilon$  и  $\mu$  – соответственно электрическая и магнитная проницаемость среды.

Если подставить в выражение для  $c$  известные значения электрической и магнитной постоянных:  $\epsilon_0 = 8,85418782 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} \cdot \text{м}^{-1}$ ,  $\mu_0 = 1,256637061 \cdot 10^{-6} \text{ Гн} \cdot \text{м}^{-1}$ , находим  $c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$  – *скорость распространения электромагнитного поля в вакууме, которая равна скорости света.* Причем электромагнитное поле распространяется в виде периодических изменений векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , которые взаимно перпендикулярны и перпендикулярны вектору скорости  $\vec{v}$  распространения электромагнитного поля.

Полученные Максвеллом результаты показали, что в вакууме *электромагнитное возмущение* распространяется со скоростью света и *представляет поперечные колебания.* В веществе скорость распространения электромагнитных возмущений меньше в  $n = \sqrt{\epsilon \mu}$  раз. Все это позволило Максвеллу сделать фундаментальный вывод об электромагнитной природе света.

Скорость распространения электромагнитных волн в среде зависит от ее электрической и магнитной проницаемости. Величину  $n = \sqrt{\mu \epsilon}$  на-

зывают **абсолютным показателем преломления**. С учетом последнего имеем

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{n} \quad \text{и} \quad n = \frac{c}{v}.$$

Следовательно, **показатель преломления** есть *физическая величина, равная отношению скорости электромагнитных волн в вакууме к их скорости в среде*.

Векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{v}$  образуют правовинтовую систему.

Из уравнений Максвелла следует также, что в электромагнитной волне векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  всегда колеблются в одинаковых фазах, причем мгновенные значения  $E$  и  $H$  в любой точке связаны соотношением

$$\sqrt{\epsilon_0\epsilon}E = \sqrt{\mu\mu_0}H.$$

Следовательно,  $E$  и  $H$  одновременно достигают максимума, одновременно обращаются в нуль и т.д.

От уравнений (3.2.1) можно перейти к уравнениям

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}, \quad (3.2.3)$$

где  $y$  и  $z$  при  $E$  и  $H$  подчеркивают лишь то, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  направлены вдоль взаимно перпендикулярных осей  $y$  и  $z$ .

Уравнениям (3.2.3) удовлетворяют, в частности, плоские монохроматические электромагнитные волны (ЭМВ одной строго определенной частоты), описываемые уравнениями

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad \text{и} \quad H_z = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi), \quad (3.2.4)$$

где  $E_0$  и  $H_0$  – соответственно амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны;  $\omega$  – круговая частота;  $k = \frac{\omega}{v}$  – волновое число;  $\varphi$  – начальная фаза колебаний в точках с координатой  $x = 0$ .

В уравнениях (3.2.4) начальные фазы одинаковы, т.е. колебания электрического и магнитного векторов в ЭМВ происходят в одинаковых фазах.

Из всего вышеизложенного можно сделать следующие **заключения**:

- векторы  $\vec{H}$ ,  $\vec{E}$  и  $\vec{v}$  взаимно перпендикулярны, т.к.  $\vec{k}$  и  $\vec{v}$  направлены одинаково;
- электромагнитная волна является поперечной;
- электрическая и магнитная составляющие распространяются в одном направлении;
- векторы  $\vec{H}$  и  $\vec{E}$  колеблются в одинаковых фазах.

### 3.2.3. Экспериментальные исследования ЭМВ

Как было сказано выше, экспериментальная проверка вывода теории Максвелла о существовании ЭМВ была осуществлена Герцем. Для получения волн Герц применял разные модификации изобретенного им вибратора, который возбуждал ряд цугов слабозатухающих волн (рис. 3.2.2).

В вибраторе во время колебаний устанавливалась стоячая волна тока и напряжения. Сила тока  $I$  была максимальна в середине вибратора (пучность тока) и обращалась в нуль на его концах (узлы тока). Напряжение  $U$  в середине вибратора имело узел на концах пучности. Таким образом, вибратор аналогичен струне, колеблющейся с основной (т.е. с наименьшей) частотой. Длина  $\lambda$  излучаемых вибратором волн приблизительно в 2 раза превышала длину вибратора (*полуволновой вибратор*).

Исследования излучаемой волны Герц осуществлял также при помощи полуволнового вибратора с небольшим искровым промежутком посередине. При размещении такого вибратора параллельно вектору напряженности электрического поля волны в нем возбуждались колебания тока и напряжения. Так как длина вибратора была равна  $\lambda/2$ , вследствие резонанса колебания в нем достигали такой интенсивности, что вызывали проскакивание в искровом промежутке небольших искр.

В ходе своих исследований Герц обнаружил, что если расстояние между вибратором и приемником (резонатором) меньше одного метра, то поле вибратора в этой области соответствует излучению поля диполем и убывает обратно пропорционально кубу расстояния (эту зону назвали *ближней зоной*, здесь  $r \leq \lambda$ ). Однако на расстояниях более трех метров поле убывает значительно медленнее (это волновая зона, где  $r \geq \lambda$ ) и неодинаково в различных направлениях. В направлении оси вибратора поле практически исчезает на расстоянии четырех метров, а в направлении, перпендикулярном к оси вибратора, достигает расстояния двенадцати метров и более (рис. 3.2.3).

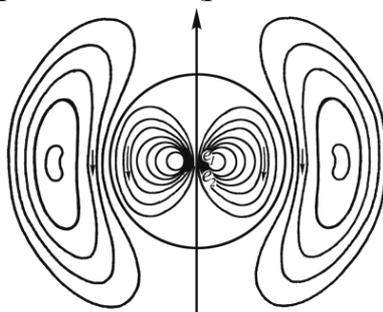


Рис. 3.2.3

Для объяснения этих результатов Герц теоретически, на основе электродинамики Максвелла, анализирует излучение вибратора. Здесь он впервые получает результат, что волновое поле на дальних расстояниях убывает очень медленно – обратно пропорционально расстоянию, а само поле распространяется со скоростью света. Векторы  $\vec{H}$  и  $\vec{E}$  максимальны в направлениях, перпендикулярных направлению колебаний заряда в вибраторе; вдоль направления колебаний заряда – над и под антенной – поля обращаются в нуль. В результате своих исследований Герц дополнил теорию Максвелла теорией электромагнитного излучения, впервые получил электромагнитные волны, предсказанные Максвеллом, и доказал их тождество с волнами света.

Для исследования свойств электромагнитных волн Герц использовал металлические параболические зеркала и большую призму из твердой смолы – асфальта с основанием 1,2 м и высотой 1,5 м с преломляющим углом  $30^\circ$ , рис. 3.2.4, а.

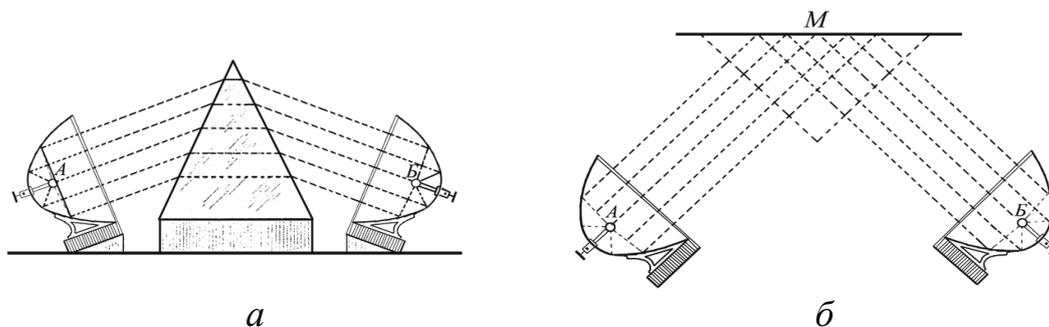


Рис. 3.2.4

В своих опытах Герц установил полную аналогию электромагнитных и световых волн. Было показано, что для электромагнитных волн справедлив закон отражения и преломления. Кроме того, опыты Герца подтвердили соотношение  $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ , следующее из теории Максвелла.

Поместив излучающий вибратор в фокусе вогнутого зеркала, Герц получил направленную плоскую волну. На ее пути он расположил плоское зеркало и получил таким образом стоячую волну. Измерив расстояние между узлами и пучностями волны, Герц нашел длину волны  $\lambda$ . Произведение  $\lambda$  на частоту колебаний вибратора  $\nu$  дало скорость ЭМВ, которая оказалась близкой к скорости света  $c$ . Располагая на пути волн решетку из параллельных друг другу медных проволок, Герц обнаружил, что при вращении решетки вокруг луча интенсивность волн, прошедших сквозь решетку, сильно изменяется. Когда проволоки проходили перпендикулярно к вектору  $\vec{E}$ , волна проникала сквозь решетку без помех. При расположении проволоки параллельно вектору  $\vec{E}$  волна

сквозь решетку не проходила. Экспериментально была подтверждена поперечность ЭМВ.

Выводы, которые следовали из теории Максвелла:

*Во-первых: в любой точке векторы напряженности электрического  $\vec{E}$  и магнитного  $\vec{H}$  полей взаимно перпендикулярны и перпендикулярны направлению распространения  $\vec{v}$ .*

*Во-вторых: поля изменяют свое направление в пространстве: в одних точках вектор  $\vec{H}$  направлен к плоскости страницы, в других – от нее; аналогично ведет себя и вектор  $\vec{E}$ .*

*В-третьих: электрическое и магнитное поля находятся в фазе, т.е. они достигают максимума и обращаются в нуль в одних и тех же точках.*

Герц экспериментально подтвердил выводы теории Максвелла.

Если ЭДС генератора изменяется по синусоидальному закону, то и напряженность электрического поля и магнитного поля будет изменяться по синусоидальному закону. Строго говоря, это справедливо в точках, достаточно удаленных от источника (в волновой зоне, когда  $r > \lambda$ ).

Отметим также, что в ходе исследований свойств электромагнитных волн Герц сделал еще одно важнейшее открытие – **фотоэлектрический эффект** (вырывание электрических зарядов с поверхности металлов под действием света).

Опыты Герца были продолжены П.Н. Лебедевым, который в 1894 г. получил ЭМВ длиной 4–6 мм и исследовал прохождение их в кристаллах. При этом было обнаружено двойное преломление волн.

Дальнейшее развитие методики эксперимента позволило в 1923 г. А.А. Глаголевой-Аркадьевой сконструировать массовый излучатель, в котором короткие ЭМВ, возбужденные колебаниями электрических зарядов в атомах и молекулах, генерировались с помощью искр между металлическими опилками, взвешенными в масле. Так были получены волны длиной  $\lambda$  от 50 мм до 80 мкм. Тем самым было доказано существование волн, перекрывающих интервал между радиоволнами и инфракрасным излучением. Позднее были получены волны в очень широком диапазоне частот.

Усовершенствовав вибратор Герца и применив свой приемник, профессор Петербургского электротехнического института А.С. Попов в 1896 г. впервые в мире наладил опытную радиотелеграфную связь и осуществил с помощью электромагнитных волн передачу сообщения на расстояние около 250 м (первыми переданы слова «Генрих Герц»). Тем самым было положено основание радиотехнике. В 1899 г. Попов довел расстояние беспроводной передачи сигналов до 50 км.

В 1901 г. была осуществлена радиотелеграфная связь через Атлантический океан. Изобретение электронных ламп (1904–1907) и применение их для генерирования незатухающих колебаний (1913 г.) сделали возможным развитие радиотелеграфии и радиовещания. В 20–30-х гг. весь мир покрылся сетью мощных радиопередающих станций. Человечество вступило в новую эру коммуникационных отношений. Эффективность и невиданная до сих пор скорость прогресса в этой области были обеспечены фундаментальной теоретической базой, созданной Дж. Максвеллом и развитой в исследованиях Г. Герца, А.С. Попова, Г. Маркони и многих других ученых и инженеров.

ЭМВ отличаются друг от друга по способам генерации и регистрации, а также по своим свойствам. По этим признакам их делят на несколько видов: радиоволны, световые волны, рентгеновское и  $\gamma$ -излучение. Шкала ЭМВ изображена на рис. 3.2.5.

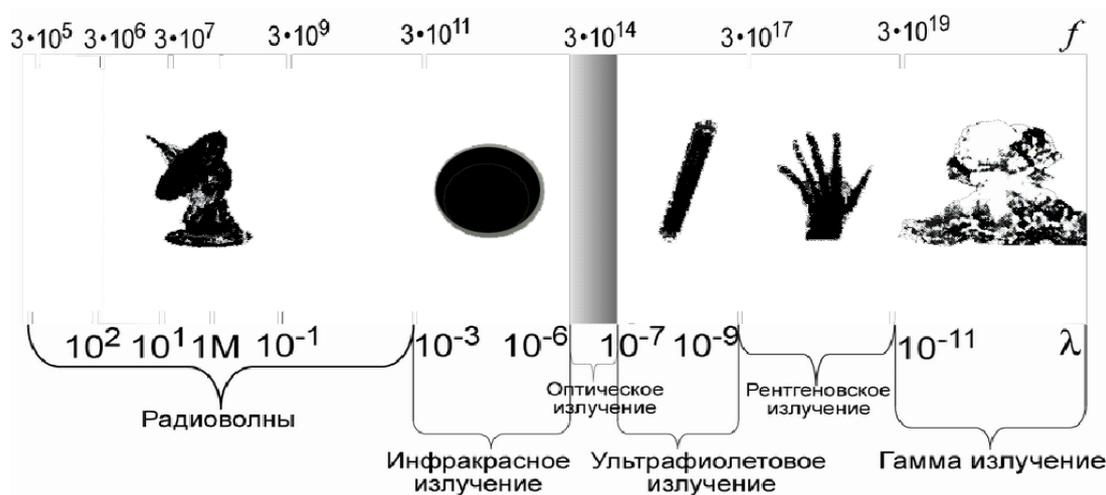


Рис. 3.2.5

Следует отметить, что границы между различными типами ЭМВ в значительной степени условны, т.к. при пограничных значениях  $\nu$  и  $\lambda$  эти волны мало чем отличаются друг от друга.

### 3.2.4. Энергия и импульс электромагнитного поля

Мы уже много раз показывали, что электромагнитное поле обладает энергией. Значит, распространение электромагнитных волн связано с переносом энергии (подобно тому, как распространение упругих волн в веществе связано с переносом механической энергии). Сама возможность обнаружения ЭМВ указывает на то, что они переносят энергию.

Для характеристики переносимой волной энергии русским ученым Н.А. Умовым были введены понятия о скорости и направлении движе-

ния энергии, о потоке энергии. Спустя десять лет после этого, в 1884 г., английский ученый Джон Пойнтинг описал процесс переноса энергии с **помощью вектора плотности потока энергии**.

Введем вектор  $d\omega = \vec{H}d\vec{B} + \vec{E}d\vec{D}$  – приращение плотности электромагнитной энергии, где сама величина  $\omega$  определяется интегралом

$$\omega = \int (\vec{H}d\vec{B} + \vec{E}d\vec{D}).$$

Объемная плотность энергии  $\omega$  электромагнитной волны складывается из объемных плотностей  $w_э$  и  $w_м$  электрического и магнитного полей:

$$w = w_э + w_м = \frac{\epsilon_0\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0\mu H^2}{2}.$$

Учитывая, что  $\sqrt{\epsilon_0\epsilon}E = \sqrt{\mu_0\mu}H$ , получим, что плотность энергии электрического и магнитного полей в каждый момент времени одинакова, т.е.  $w_э = w_м$ . Поэтому

$$w = 2w_э = \epsilon_0\epsilon E^2 = \sqrt{\epsilon_0\epsilon}\sqrt{\mu_0\mu}EH.$$

Умножив плотность энергии  $w$  на скорость  $v$  распространения волны в среде, получим модуль **плотности потока энергии** – *поток энергии через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны в единицу времени*:

$$S = wv = EH. \quad (3.2.5)$$

Так как векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему, то направление вектора  $[\vec{E}, \vec{H}]$  совпадает с направлением переноса энергии, а модуль этого вектора равен  $EH$  (рис. 3.2.6).

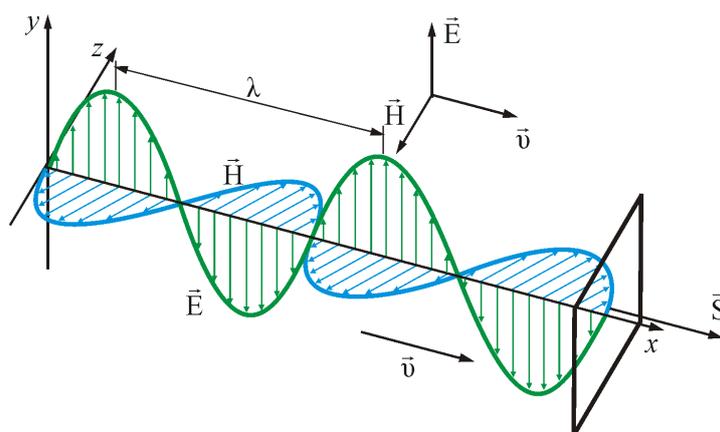


Рис. 3.2.6

**Вектор плотности потока электромагнитной энергии называется вектором Умова – Пойнтинга:**

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]. \quad (3.2.6)$$

Вектор  $\vec{S}$  направлен в сторону распространения электромагнитной волны, а его модуль равен энергии, переносимой электромагнитной волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны.

В сферической электромагнитной волне, излучаемой ускоренно движущимися зарядами, векторы  $\vec{H}$  направлены по параллелям, векторы  $\vec{E}$  – по меридианам, а поток энергии  $\vec{S}$  – по нормали  $\vec{n}$  (рис. 3.2.7).

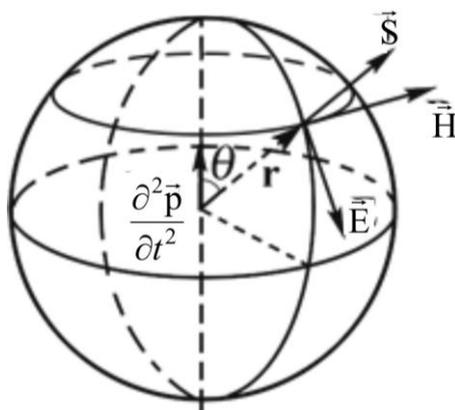


Рис. 3.2.7

Вектор Умова – Пойнтинга зависит от пространства и времени, т.к. от него зависят модули векторов напряженности электрического и магнитного полей. Поэтому часто пользуются параметром, называемым **интенсивностью**, – модуль среднего значения вектора Умова – Пойнтинга:

$$J = |\langle \vec{S} \rangle|. \quad (3.2.7)$$

Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды:

$$J \sim \frac{\sin^2 \theta}{r^2}. \quad (3.2.8)$$

Зависимость интенсивности излучения от направления называют **диаграммой направленности**. Такая диаграмма для линейного излучателя показана на рис. 3.2.8.

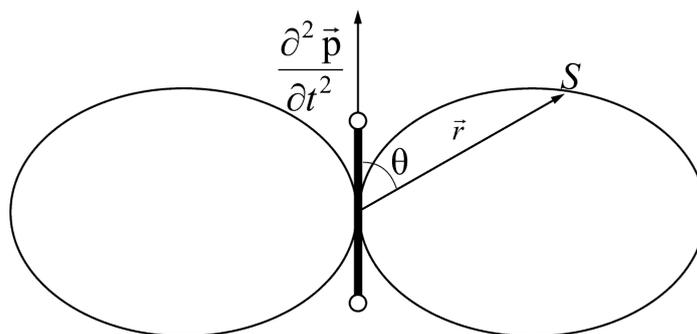


Рис. 3.2.8

Как доказал Герц, диполь сильнее всего излучает в направлении, перпендикулярном по отношению к собственному направлению.

Ускоренно двигающиеся заряды излучают электромагнитную энергию в окружающее пространство. Вектор  $\vec{S}$  направлен вдоль радиуса  $\vec{r}$  и убывает обратно пропорционально  $r^2$ . Излучение максимально в направлении, перпендикулярном вектору  $\frac{\partial^2 \vec{p}}{\partial t^2}$ , и отсутствует вдоль этого вектора. Поэтому диаграмма направленности диполя имеет вид двух симметричных лепестков, как показано на рис. 3.2.8.

### Электромагнитная масса и импульс

Существование давления ЭМВ приводит к выводу о том, что электромагнитному полю присущ механический импульс.

Выражая импульс как  $p = mc$  (поле в вакууме распространяется со скоростью света  $c$ ), получим

$$p = mc = \frac{E}{c},$$

отсюда

$$E = mc^2. \quad (3.2.9)$$

Это соотношение между массой и энергией ЭМП является универсальным законом природы, справедливым для любых тел, независимо от их внутреннего строения.

Импульс электромагнитного поля, связанного с движущейся частицей, – **электромагнитный импульс** – оказался пропорциональным скорости частицы  $v$ , что имеет место и в выражении для обычного импульса  $mv$ , где  $m$  – инертная масса заряженной частицы. Поэтому коэффициент пропорциональности в полученном выражении для импульса  $\vec{p}$  называют **электромагнитной массой**:

$$m_{\text{эл}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{ac^2 4\pi\epsilon_0}, \quad (3.2.10)$$

где  $e$  – заряд движущейся частицы;  $a$  – ее радиус.

И даже если тело не обладает никакой иной массой, оказывается, что между импульсом и скоростью заряженной частицы существует соотношение

$$\vec{p} = m_{\text{эл}} \vec{v}. \quad (3.2.11)$$

Это соотношение как бы раскрывает происхождение массы – это электродинамический эффект. Движение заряженной частицы сопровождается возникновением магнитного поля. Магнитное поле сообщает телу дополнительную инертность – при ускорении затрачивается работа на создание магнитного поля, при торможении – работа против затормаживающих сил индукционного происхождения. По отношению к движущемуся заряду электромагнитное поле является средой, неотделимой от заряда. В общем случае можно записать, что полный импульс равен сумме механического и электромагнитного импульсов; возможно, что другие поля вносят и иные вклады в полную массу частицы, но определено в полной массе есть электромагнитная часть:

$$m = m_{\text{мех}} + m_{\text{эл}}, \quad \vec{p} = m\vec{v}.$$

Если учесть релятивистские эффекты сокращения длины и преобразования электрических и магнитных полей, то для электромагнитного импульса получается также релятивистски инвариантная формула –

$$\vec{p} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{ac^2 4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.2.12)$$

Таким же образом изменяется релятивистский механический импульс.

### Контрольные вопросы. Упражнения

1. Что такое электромагнитная волна? Какова скорость ее распространения?
2. Что такое поперечная волна, продольная? Когда возникают?
3. Что такое волновой фронт? волновая поверхность?
4. Что называется длиной волны? Какова связь между длиной волны, скоростью и периодом?
5. Что такое волновое число? фазовая и групповая скорости?
6. Какая волна является бегущей, гармонической, плоской, сферической? Каковы уравнения этих волн?

7. При каких условиях возникает интерференция волн? Назовите условия интерференционных максимума и минимума.

8. Две когерентные волны с одинаковым периодом распространяются в одном направлении. Разность хода равна четному числу полуволн. Что получится в результате интерференции?

9. Всегда ли сохраняется энергия при интерференции двух волн?

10. Что может служить источником электромагнитных волн?

11. Каковы физические процессы, приводящие к возможности существования электромагнитных волн?

12. Почему Герц в своих опытах использовал открытый колебательный контур?

13. Как можно представить себе шкалу электромагнитных волн, и каковы источники излучения разных видов волн?

14. Какие характеристики поля периодически изменяются в бегущей электромагнитной волне?

15. Почему слагаемое  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  в уравнении Максвелла

$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{S}$  нужно для понимания распространения электромагнитной волны?

16. Запишите волновое уравнение для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  переменного электромагнитного поля. Проанализируйте его решения и объясните физический смысл.

17. Как определяется фазовая скорость электромагнитных волн?

18. Как определить объемную плотность энергии в электромагнитной волне?

19. В чем заключается физический смысл вектора Умова – Пойнтинга? Чему он равен?

20. Почему важна задача об излучении диполя?

21. В чем заключается физический смысл диаграммы направленности излучения диполя?

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Во второй части курса физики рассмотрены все основные вопросы одного из самых важных разделов физики – «Электромагнитные явления».

В разделе «Электростатика и постоянный ток» рассмотрены основные понятия электростатики: точечный заряд, напряженность и потенциал электростатического поля. Описаны связи и законы, действующие в электростатике. Достаточно подробно рассмотрены примеры вычисления электростатических полей с помощью теоремы Остроградского – Гаусса. Рассмотрено поведение диэлектриков и проводников в электростатическом поле. Рассмотрены условия возникновения и законы постоянного тока.

В разделе «Электричество и магнетизм» показано условие существования магнитного поля, рассмотрены силовые характеристики магнитного поля – магнитная индукция и напряженность магнитного поля. Рассмотрены законы электромагнетизма: закон Био – Савара – Лапласа, теорема Гаусса для вектора магнитной индукции, закон Ампера, закон Фарадея. Рассмотрена сила, действующая на движущиеся в магнитном поле заряды (сила Лоренца).

Подробно изложена единая теория электрических и магнитных явлений Максвелла, дана релятивистская трактовка магнитным явлениям.

В разделе «Электрические колебания и волны» рассмотрены важнейшие вопросы классической и современной физики, касающиеся электромагнитных колебаний и распространения волн.

Несмотря на огромные успехи, которые достигла электродинамика начиная со времен исследований Эрстеда, Ампера и до наших дней, перед ней стоит целый ряд нерешенных проблем. Например, проблемы физики плазмы – разработка методов разогрева плазмы и создание управляемых термоядерных реакторов, являющихся источником безграничной энергии; квантовой электроники – существенное повышение КПД лазеров, расширение длин волн излучения и т.д.

Решение стоящих перед современной электродинамикой задач является важнейшим условием научно-технического прогресса.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

### Основная

1. Тюрин Ю.И., Чернов И.П., Крючков Ю.Ю. Физика. Ч. 2. Электричество и магнетизм: учебное пособие для технических университетов. – Томск: Изд-во Томского ун-та, 2003. – 738 с.
2. Савельев И.В. Курс общей физики: в 3-х т. Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика: учебное пособие. – 7-е изд., стер. – СПб.: Изд-во «Лань», 2007. – 496 с.: ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
3. Бондарев, Б.В. Курс общей физики: в 3 кн. Кн. 2. Электромагнетизм. Волновая оптика. Квантовая физика: учебное пособие / Б.В. Бондарев, Н.П. Калашников, Г.Г. Спирын. – 2-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2005. – 438 с.
4. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики: учебное пособие для вузов. – 4-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2002. – 718 с.
5. Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов. – 14-е изд., перераб. и доп. – М.: Издат. центр «Академия», 2007. – 560 с.
6. Иродов И.Е. Электромагнетизм. Основные законы. – 5-е изд. – М.: БИНОМ; Лаборатория знаний, 2006. – 319 с.: ил.
7. Сивухин Д.В. Общий курс физики: в 5 т. Т. 3. Электричество: учебное пособие для вузов. – 3-е изд., стер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 656 с.

### Дополнительная

1. Джанколли Д. Физика. – М.: Мир, 1989. – 342 с.
2. Чернов И.П., Ларионов В.В., Веретельник В.И. Физический практикум. Ч. 2. Электричество и магнетизм: учебное пособие для технических университетов. – Томск: Изд-во ТПУ, 2004. – 182 с.
3. Чернов И.П., Ларионов В.В., Тюрин Ю.И. Физика: сборник задач. Ч. 2. Электричество и магнетизм: учебное пособие. – Томск: Изд-во Томского ун-та, 2004. – 448 с.
4. Трофимова Т.И. Курс физики. Задачи и решения: учебное пособие для вузов / Т.И. Трофимова, А.В. Фирсов. – М.: Издат. центр «Академия», 2004. – 592 с.
5. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. – 12-е изд., стер. – СПб.: «Лань», 2007. – 416 с.
6. Кузнецов С.И. Электростатика. Постоянный ток: учебное пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 132 с.
7. Кузнецов С.И. Электромагнетизм: учебное пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 92 с.
8. Кузнецов С. И. Колебания и волны. Геометрическая и волновая оптика: учебное пособие. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2007. – 170 с.

## ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

### Электростатика и постоянный ток

#### 1. Электростатическое поле в вакууме

- ◆ Закон Кулона  $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}; \quad F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2}.$
- ◆ Закон сохранения заряда  $\sum q_i = \text{const}.$
- ◆ Напряженность электростатического поля  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}; \quad E = \frac{F}{q} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$
- ◆ Принцип суперпозиции  $\vec{E} = \sum \vec{E}_i.$
- ◆ Результирующая напряженность электростатического поля двух зарядов  $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + E_1 E_2 \cos\alpha}.$
- ◆ Линейная плотность заряда  $\lambda = dq/dl.$
- ◆ Поверхностная плотность заряда  $\sigma = dq/dS.$
- ◆ Объемная плотность заряда  $\rho = dq/dV.$
- ◆ Электрический момент диполя  $\vec{p} = q\vec{l}.$
- ◆ Напряжённость поля электрического диполя  $E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3\cos^2\varphi + 1}.$

#### 2. Теорема Остроградского – Гаусса и её применение

- ◆ Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме
  - для одного заряда  $\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{q}{\epsilon_0};$
  - для нескольких зарядов  $\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV.$
- ◆ Теорема Гаусса в дифференциальной форме  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  или  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$
- ◆ Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью  $E = \sigma/2\epsilon_0.$
- ◆ Напряженность поля, создаваемого двумя параллельными разноименно заряженными бесконечными плоскостями  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$

- ◆ Напряженность поля нити (цилиндра) и напряженности поля между двумя цилиндрами выражается по одной формуле  $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ .
- ◆ Напряжённость поля между двумя цилиндрами  $E = \lambda/2\pi\epsilon_0 r$ .

### 3. Потенциал и работа электростатического поля. Связь напряженности с потенциалом

- ◆ Работа по перемещению заряда  $q$  из точки 1 в точку 2
 
$$dA = Fdl \cos\alpha; \quad A = q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}; \quad A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$
- ◆ Теорема о циркуляции вектора напряженности  $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$ .
- ◆ Потенциальная энергия взаимодействия двух зарядов  $W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r}$ .
- ◆ Потенциал электростатического поля  $\varphi = \frac{W}{q} = \frac{A_\infty}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$ .
- ◆ Потенциал системы зарядов  $\varphi = \sum \varphi_i$ .
- ◆ Связь между потенциалом и напряженностью  $\vec{E} = -\text{grad}\varphi, \quad \vec{E} = -\nabla\varphi$ .
- ◆ Потенциал поля диполя  $\varphi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2} \cos\alpha$ .
- ◆ Потенциальная энергия диполя  $W = -\vec{p}\vec{E} = pE \cos\alpha$ .
- ◆ Механический момент, действующий на диполь в электростатическом поле  $\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}]$  или  $M = pE \sin\alpha$ .
- ◆ Работа в потенциальном поле  $A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU$ .
- ◆ Безвихревой характер электростатического поля  $\text{rot}\vec{E} = 0$  или  $[\nabla, \vec{E}] = 0$ .
- ◆ Потенциал поля между заряженными плоскостями  $\varphi = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$ .

### 4. Диэлектрики в электростатическом поле

- ◆ Результирующее поле внутри диэлектрика  $E = E_0 - E'$ .
- ◆ Электрический момент одной молекулы  $\vec{p}_1 = q\vec{l}$ .
- ◆ Вектор поляризации  $\vec{P} = \sum \vec{p}_1 = n\vec{p}_1 = na\epsilon_0 \vec{E} = \chi\epsilon_0 \vec{E}$ .
- ◆ Диэлектрическая восприимчивость  $\chi = na$ .

- ◆ Диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon = 1 + \chi$ ;  $\epsilon = \frac{E_0}{E}$ .
- ◆ Связь диэлектрической восприимчивости с поляризуемостью молекулы  $\alpha \quad \frac{\chi}{\chi + 3} = \frac{1}{3} \alpha n$ .

- ◆ Вектор электрического смещения (электрическая индукция)

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}.$$

- ◆ Связь вектора  $\vec{D}$  с напряженностью и поляризуемостью  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ .
- ◆ Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_{i=1}^n q_i.$$

- ◆ Закон преломления векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$   $\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{D_{2\tau}}{D_{1\tau}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$ .

## 5. Проводники в электростатическом поле

- ◆ Электростатическое экранирование  $\frac{d\phi}{dl} = -E = 0$ ;  $\phi = \text{const}$ .
- ◆ Электрическая емкость уединенного проводника  $C = \frac{q}{\phi}$ .
- ◆ Электрическая емкость шара  $C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R$ .
- ◆ Электрическая емкость плоского конденсатора  $C = \frac{\epsilon_0\epsilon S}{d}$ .
- ◆ Емкость цилиндрического конденсатора  $C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln r_2/r_1} \approx \frac{\epsilon_0\epsilon S}{d}$ .
- ◆ Емкость сферического конденсатора  $C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \approx \frac{\epsilon_0\epsilon S}{d}$ .
- ◆ Емкость параллельно соединенных конденсаторов  $C = \sum_{i=1}^n C_i$ .
- ◆ Емкость последовательно соединенных конденсаторов  $\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$ .
- ◆ Энергия взаимодействия двух зарядов  $W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} = \frac{1}{2} (q_1 \phi_1 + q_2 \phi_2)$ .
- ◆ Энергия заряженного уединенного проводника  $W = \frac{C\phi^2}{2} = \frac{q\phi}{2} = \frac{q^2}{2C}$ .

- ♦ Энергия заряженного конденсатора  $W = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C}$ .
- ♦ Объемная плотность энергии  $w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2}$ .
- ♦ Пондермоторные силы в конденсаторе  $F = \frac{q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}$ .

### 6. Эмиссия электронов из проводников. Контактные явления на границах проводников

- ♦ Работа выхода электрона из металла проводников  
 $A_{\text{вых}} = e(\varphi_{\text{вн}} - \varphi_{\text{пв}})$ .
- ♦ Закон Чайльда – Ленгмюра  $j = AE^{3/2}$ .
- ♦ Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта  $h\nu = \frac{mv^2}{2} + A_{\text{вых}}$ .
- ♦ Термо ЭДС термопары  $E = \alpha(T_{\text{г}} - T_{\text{х}})$ .
- ♦ Эффект Пельтье  $Q_{\text{п}} = \Pi_{12}j$ .

### 7. Постоянный электрический ток

- ♦ Связь напряженности и потенциала с плотностью распределения зарядов в пространстве  $\nabla E = \frac{1}{\varepsilon}\rho$  и  $\nabla^2\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\rho$ .
- ♦ Сила постоянного тока  $I = \frac{q}{t}$ .
- ♦ Сила тока  $I = \frac{\partial q}{\partial t} = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ .
- ♦ Плотность тока  $j = \frac{I}{S}$ .
- ♦ Вектор плотности тока  $\vec{j} = q_+ n_+ \vec{v}_{\text{др}+} + q_- n_- \vec{v}_{\text{др}-}$ .
- ♦ Уравнение непрерывности в интегральной форме  $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial q}{\partial t}$ .
- ♦ Дифференциальная форма  $\nabla \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$  или  $\text{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ .
- ♦ Уравнение непрерывности для постоянного тока  
 $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0; \nabla \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ .

- ◆ Электродвижущая сила, действующая в цепи  $\mathbf{E} = \frac{A}{q}$ ,  $\mathbf{E} = \oint E_{\text{ст}} dl$ .
- ◆ Закон Ома для однородного участка цепи  $I = \frac{U}{R}$ .
- ◆ Сопротивление при последовательном соединении  $R = \sum R_i$ .
- ◆ Сопротивление при параллельном соединении  $R = \sum \frac{1}{R_i}$ .
- ◆ Сопротивление однородного проводника  $R = \frac{\rho l}{S}$ .
- ◆ Зависимость удельного сопротивления от температуры  $\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$ .
- ◆ Проводимость  $\sigma = \frac{1}{R}$ .
- ◆ Закон Ома в дифференциальной форме  $\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma \vec{E}$ .
- ◆ Обобщенный закон Ома  $I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathbf{E}_{12}}{R}$ .
- ◆ Закон Ома для замкнутой цепи  $I = \frac{\mathbf{E}}{R + r}$ .
- ◆ Работа силы электрического поля  $A = RI^2 t$ .
- ◆ Мощность тока  $P = \frac{dA}{dt} = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}$ .
- ◆ Мощность, выделяемая в единице объема проводника  $w = \rho j^2$ .
- ◆ Закон Джоуля – Ленца  $dQ = IU dt = I^2 R dt = \frac{U^2}{R} dt$ .
- ◆ Закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме  $w = jE = \sigma E^2$ .
- ◆ КПД источника тока  $\eta = \frac{A_{\text{п}}}{A_{\text{з}}} = \frac{N_{\text{п}}}{N_{\text{з}}} = \frac{U}{\mathbf{E}} = \frac{R}{R + r}$ .
- ◆ Первое правило Кирхгофа  $\sum_k I_k = 0$ .
- ◆ Второе правило Кирхгофа  $\sum_i I_i R_i = \sum_k \mathbf{E}_k$ .

### 8. Электрический ток в газах, металлах и электролитах

- ◆ Плотность тока в газах  $\vec{j} = nq(\vec{v}^+ + \vec{v}^-)$ .

- ◆ Удельная электропроводность  $\sigma = q \sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}} (\mu_+ + \mu_-)$ .
- ◆ Закон Ома для тока в газах  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ .
- ◆ Закон Ома для тока в металлах  $I = enS \vec{v}_d = \frac{1}{2} \frac{e^2 \tau n S}{m} E = \frac{e^2 \tau n S}{2 m l} U$ .
- ◆ Электрическое сопротивление проводника  $R = \frac{2 m l}{e^2 n \tau S}$ .
- ◆ Первый закон Фарадея  $m = k q = k I t$ .
- ◆ Электрохимический эквивалент вещества  $k = \frac{\mu}{F n}$ .
- ◆ Второй закон Фарадея  $\frac{k_2}{k_1} = \frac{k_{x2}}{k_{x1}}$ .
- ◆ Объединенный закон Фарадея  $m = \frac{1}{F} \frac{\mu}{n} I t$ .

## Электромагнетизм

### 1. Магнитное поле

- ◆ Магнитный момент контура с током  $P_m = IS$  или  $\vec{P}_m = IS \vec{n}$ .
- ◆ Момент силы, вращающий рамку с током в магнитном поле  
 $\vec{M} = [\vec{P}_m, \vec{B}]$  или  $M = P_m B \sin \alpha = ISB \sin \alpha$ .
- ◆ Магнитная индукция  $B = \frac{M_{\max}}{P_m \sin(\vec{n}, \vec{B})}$ .
- ◆ Потенциальная (механическая) энергия контура с током в магнитном поле  $E_{п, мех} = \vec{P}_m \vec{B} = P_m B \cos \alpha$ .
- ◆ Принцип суперпозиции для магнитных полей  $\vec{B} = \sum B_i$ .
- ◆ Модуль магнитной индукции при сложении двух полей  
 $B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1 B_2 \cos \alpha}$ .
- ◆ Закон Био – Савара – Лапласа для элемента проводника с током  
 $d\vec{B} = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}; \quad dB = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2} \sin \alpha$ .
- ◆ Индукция магнитного поля движущегося заряда  $B_1 = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} \frac{q v \sin(\vec{v}, \vec{r})}{r^2}$ .
- ◆ Магнитная индукция конечного проводника

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

- ◆ Индукция бесконечно длинного проводника  $B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b}$ .
- ◆ Магнитная индукция в центре кругового тока  $B = \mu\mu_0 \frac{I}{2R}$ .
- ◆ Магнитная индукция кругового тока на расстоянии  $x$  от центра

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(R^2 + x^2)^{3/2}}; \quad B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2P_m}{x^3}.$$

- ◆ Напряженность магнитного поля  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0}$ .

## 2. Силы, действующие на движущиеся заряды в магнитном поле

- ◆ Закон Ампера  $d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}]$  или  $\vec{F} = I[\vec{l}, \vec{B}]$ .
- ◆ Модуль вектора силы Ампера  $F = IlB\sin\alpha$ .
- ◆ Сила взаимодействия двух параллельных проводников с токами  $I_1$  и

$$I_2 \text{ на расстояние } b \quad F = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{b}.$$

- ◆ Сила Лоренца  $\vec{F}_L = q[\vec{v}, \vec{B}]$ ,  $F_L = qvB\sin\alpha$ ,  $\vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$ .
- ◆ Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле  $dA = I(d\Phi_2 - d\Phi_1)$ .

- ◆ Работа по перемещению замкнутого контура в магнитном поле  $dA = Id\Phi'$ .

- ◆ Магнитная индукция внутри бесконечного длинного соленоида  $B = \mu\mu_0 nI$ .

- ◆ Магнитное поле в произвольной точке внутри конечного соленоида

$$B = \frac{1}{2} \mu\mu_0 nI (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

- ◆ Магнитное поле на середине оси соленоида

$$B_{\max} = \mu\mu_0 nI \frac{L}{\sqrt{4R^2 + L^2}}.$$

- ◆ Холловская поперечная разность потенциалов  $U_x = \frac{1}{en} \frac{IB}{a} = R \frac{IB}{a}$ .

- ◆ Коэффициент Холла  $R = \frac{1}{qn}$ .

- ◆ Число носителей заряда  $n = \frac{IB}{qaU_x}$ .

### 3. Явление электромагнитной индукции

- ◆ Закон Фарадея  $\mathbf{E}_\zeta = -\frac{d\Phi}{dt}$  или  $\mathbf{E}_\zeta = -\frac{d\Psi}{dt}$ .
- ◆ ЭДС индукции  $\mathbf{E}_\zeta = -S \frac{dB}{dt}$ .
- ◆ Работа по перемещению заряда вихревым электрическим полем  

$$A = q \oint_a \vec{E}' d\vec{l} = q\mathbf{E}_\zeta.$$

### 4. Ускорители заряженных частиц

- ◆ Радиус траектории нерелятивистской частицы  $R = \frac{mv}{qB}$ .
- ◆ Шаг винтовой линии траектории  $h = vT \cos\alpha$ .
- ◆ Период обращения нерелятивистской частицы  $T = \frac{2\pi m}{qB}$ .
- ◆ Импульс релятивистской частицы  $p = \frac{1}{c} \sqrt{K(K + 2m_0c^2)}$ .
- ◆ Кинетическая энергия частицы  $K = W - W_0 = mc^2 - m_0c^2$ .
- ◆ Период обращения релятивистской частицы  

$$T = \frac{2\pi m}{qB\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2\pi W}{qBc^2}.$$
- ◆ Радиус окружности траектории релятивистской частицы  

$$R = \frac{m_0 v}{qB\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$
- ◆ Энергия, передаваемая вихревым электрическим полем единичному заряду  

$$\frac{mv^2}{2} = \oint_L q\vec{E}' d\vec{l} = q\mathbf{E}_\zeta.$$

### 5. Самоиндукция и взаимная индукция

- ◆ Индуктивность соленоида и тороида  $L_{\text{сол}} = \mu\mu_0 n^2 l S$ .

- ◆ ЭДС самоиндукции контура  $\mathbf{E}_i = -L \frac{dI}{dt}$ .
- ◆ Индуктивность бесконечно длинного соленоида, имеющего  $N$  витков
 
$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l}.$$
- ◆ Постоянная времени цепи  $\tau = \frac{L}{R}$ .
- ◆ Ток при замыкании цепи  $I = I_0 (1 - e^{-t/\tau})$ .
- ◆ Ток при размыкании цепи  $I = I_0 e^{-t/\tau}$ .
- ◆ Коэффициент трансформации  $k = \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_1} = \frac{N_2}{N_1}$ .
- ◆ Работа в цепи с убывающим током  $dA = \mathbf{E}_i I dt$ .
- ◆ Энергия проводника с током  $I$  и индуктивностью  $L$   $W = \frac{LI^2}{2}$ .
- ◆ Энергия магнитного поля  $W = \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} V$ .
- ◆ Плотность энергии магнитного поля  $w = \frac{W}{V} = \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu \mu_0} = \frac{BH}{2}$ .
- ◆ Энергия магнитного поля в длинном соленоиде  $W = \frac{1}{2} \mu \mu_0 n^2 I^2 V$ .
- ◆ Плотность энергии в длинном соленоиде  $w = \frac{1}{2} \mu \mu_0 n^2 I^2$ .

## 6. Магнитные свойства вещества

- ◆ Парамагнетики  $\mu = \frac{B}{B_0} > 1$ .
- ◆ Диамагнетики  $\mu = \frac{B}{B_0} < 1$ .
- ◆ Ферромагнетики  $\mu = \frac{B}{B_0} \gg 1$ .
- ◆ Частота вращения электрона на орбите  $\nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r}$ .
- ◆ Орбитальный ток  $I = ev$ .
- ◆ Орбитальный магнитный момент электрона  $\vec{P}_m = IS\vec{n} = \frac{e\vec{v}}{2\pi r}$ .

- ◆ Орбитальный момент импульса электрона  $\vec{L}_e = m\vec{\omega}r$ .
- ◆ Связь магнитного момента и момента импульса  $\vec{P}_m = \gamma\vec{L}_e$ .
- ◆ Гиромагнитное отношение  $\gamma = -\frac{e}{2m}$ .
- ◆ Собственный момент импульса электрона (спин электрона)
 
$$L_s = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar.$$
- ◆ Спиновый магнитный момент электрона  $\vec{P}_{ms} = \gamma_s\vec{L}_s$ .
- ◆ Гиромагнитное отношение спиновых моментов  $\gamma_s = -\frac{e}{m}$ .
- ◆ Квантовый магнитный момент (магнетон Бора)  $\mu_B = \pm\frac{e\hbar}{2m}$ .
- ◆ Орбитальный магнитный момент атома  $\vec{P}_m = \sum_{i=1}^Z\vec{P}_{mi}$ .
- ◆ Орбитальный момент импульса атома  $\vec{L} = \sum_{i=1}^Z\vec{L}_{ei}$ .
- ◆ Угловая скорость ларморовской прецессии  $\omega_L = \frac{e}{2m}\vec{B}$ .
- ◆ Намагниченность  $\vec{J} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^n\vec{P}_{mi}$ .
- ◆ Напряженность магнитного поля  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$ .
- ◆ Связь намагниченности с напряженностью  $\vec{J} = \vec{H}\kappa$ .
- ◆ Магнитная восприимчивость среды  $\kappa = \mu - 1$ .

## 7. Уравнения Максвелла

- ◆ Полная система уравнений Максвелла:  
в интегральной форме

$$\oint_L H dl = -\int_S \left( j + \frac{\partial D}{\partial t} \right) dS, \quad \oint_S D dS = -\int_V \rho dV;$$

$$\oint_L E dl = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t} dS, \quad \oint_S B dS = 0;$$

в дифференциальной форме

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= j + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{D} &= \rho; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned}$$

- ◆ Материальные уравнения или уравнения состояния:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}; \quad \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}; \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} + \vec{j}_{\text{стр.}}$$

- ◆ Скорость распространения ЭМП в среде  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$ .

### Электрические колебания

- ◆ Переменный ток  $I = I_0 \sin \omega t$ .

- ◆ Напряжение  $U = I_0 R \sin \omega t$ .

- ◆ Емкость в цепи переменного тока

$$U = \frac{q}{C} = \frac{I_0}{\omega C} \cos \omega t = \frac{I_0}{\omega C} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

- ◆ Заряд конденсатора  $q = -\frac{I_0}{\omega} \cos \omega t$ .

- ◆ Реактивное емкостное сопротивление  $R_C = \frac{1}{\omega C}$ .

- ◆ Индуктивность в цепи переменного тока  $U = LI_0 \omega \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)$ .

- ◆ Реактивное индуктивное сопротивление  $R_L = \omega L$ .

- ◆ Закон Ома для переменного тока  $U_0 = I_0 \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$ .

- ◆ Полное сопротивление цепи  $Z = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$ .

- ◆ Реактивное сопротивление  $X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ .

- ◆ Закон Ома в комплексной форме  $I = \frac{\mathbf{E}}{Z} = \frac{\mathbf{E}}{R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$ .

- ◆ Дифференциальное уравнение колебаний в контуре  $\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0$ .

- ◆ Решение уравнения  $q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ .
- ◆ Собственная частота контура  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .
- ◆ Формула Томсона  $T = 2\pi\sqrt{LC}$ .
- ◆ Закон Ома для контура  $U_m = I_m \sqrt{\frac{L}{C}}$ .
- ◆ Уравнение затухающих колебаний в колебательном контуре
 
$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0.$$
- ◆ Решение уравнения  $q = q_0 \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \varphi)$ .
- ◆ Собственная частота контура  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .
- ◆ Коэффициент затухания  $\beta = \frac{R}{2L}$ .
- ◆ Частота затухающих колебаний контура  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ .
- ◆ Логарифмический декремент затухания
 
$$\chi = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{\pi R}{L\omega} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}.$$
- ◆ Добротность контура  $Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W} = \frac{\pi}{\chi} = \pi N_e$ .
- ◆ Время затухания  $\tau = \frac{1}{\beta}$ .
- ◆ Число колебаний за время затухания  $N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T}$ .
- ◆ Критическое сопротивление  $R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2R_{\text{вол}}$ .
- ◆ Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний
 
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{U_m}{L} \cos \omega t.$$
- ◆ Решение уравнения вынужденных колебаний  $q = q_m \cos(\omega t + \varphi)$ .
- ◆ Амплитуда колебаний заряда  $q_m = \frac{U_m}{\omega \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}}$ .
- ◆ Резонансная частота  $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ .

- ◆ Последовательный резонанс (резонанс напряжений)  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ .
- ◆ Параллельный резонанс (резонанс токов)  $\omega = \omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .
- ◆ Работа переменного тока за  $dt$   $A = P_t dt = U_m I_m \sin \omega t dt$ .
- ◆ Работа за период  $T$   $A = \frac{1}{2} I_m U_m T$ .
- ◆ Средняя мощность  $\langle P \rangle = I_m U_m = \frac{1}{2} R I_m^2$ .
- ◆ Действующие (эффективные) значения тока и напряжения
 
$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}; \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

## 9. Электромагнитные волны

- ◆ Волновые уравнения ЭМВ  $\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}; \quad \nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$ .
- ◆ Решение уравнений  $E_y = E_0 \cos(\omega t - kr); \quad H_z = H_0 \cos(\omega t - kr)$ .
- ◆ Скорость распространения электромагнитных волн в среде  $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ .
- ◆ Скорость света в вакууме  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ .
- ◆ Абсолютный показатель преломления среды  $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon\mu}$ .
- ◆ Объемная плотность энергии ЭВМ  $w = w_э + w_м = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{\mu \mu_0 H^2}{2}$ .
- ◆ Плотность потока энергии  $S = wv = EH$ .
- ◆ Вектор Умова – Пойнтинга  $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$ .
- ◆ Интенсивность ЭВМ  $J = \langle \vec{S} \rangle$  или  $J = \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$ .
- ◆ Давление света  $P = J \frac{1+K}{c}$  или  $P = J \frac{1+K}{c} \cos \theta$ .

## ГЛОССАРИЙ

**Автоэлектронная эмиссия** – испускание электронов проводящими твёрдыми и жидкими телами под действием внешнего электрического поля достаточно высокой напряжённости.

**Бетатрон** – циклический ускоритель электронов, в котором электроны ускоряются вихревым электрическим полем, индуцируемым переменным магнитным полем.

**Взаимодействие** – процесс воздействия объектов друг на друга.

В физике известны четыре типа фундаментальных взаимодействий: сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное.

**Вибратор Герца** – открытый колебательный контур, состоящий из двух стержней, разделенных небольшим промежутком. При подключении стержней к источнику высокого напряжения, создающему искру в промежутке между ними, вибратор Герца излучает электромагнитные волны.

**Вихревые электрические токи** – индукционные токи, возникающие в сплошных проводниках.

**Волновое число** – модуль волнового вектора  $k$ . Волновое число определяет пространственный период волны (длину волны  $\lambda$ ) в направлении её распространения:  $k = 2\pi / \lambda$ .

**Волновой вектор** – вектор  $k$ , определяющий направление распространения и пространственный период плоской монохроматической волны.

**Волны** – изменения некоторой совокупности физических величин (полей), способные перемещаться (распространяться), удаляясь от места их возникновения, или колебаться внутри ограниченной областей пространства.

**Время жизни** – время, в течение которого вероятность обнаружить систему в данном состоянии уменьшается в  $e$  раз.

**Вторичная электронная эмиссия** – испускание электронов твёрдыми и жидкими телами при их бомбардировке первичными электронами.

**Газовый разряд** – процесс протекания электрического тока в газе. В зависимости от условия осуществления разряда различают самостоятельные и несамостоятельные разряды.

**Гармонические колебания** – колебания, при которых физическая величина изменяется во времени по синусоидальному закону.

**Декремент затухания** – количественная характеристика быстроты затухания колебаний в линейной системе. Представляет собой натуральный логарифм отношения двух последующих максимальных отклонений колеблющейся величины в одну и ту же сторону.

**Диамagnetизм** – возникновение в диамagnetике намагнитченности, направленной навстречу внешнему магнитному полю.

**Диэлектрики** – вещества, относительно плохо проводящие электрический ток (по сравнению с проводниками). Внешнее электростатическое поле приводит к перераспределению электрических зарядов и появлению (или изменению) электрического дипольного момента в любом объёме диэлектрика, т. е. к его поляризации.

**Дуговой разряд** – самостоятельный разряд в газе, протекающий при сравнительно небольшом напряжении и при большой плотности тока. Основной причиной дугового разряда является интенсивная термоэлектронная эмиссия раскаленного катода.

**Емкостное сопротивление** – реактивная часть сопротивления двухполюсника, в котором синусоидальный ток опережает по фазе приложенное напряжение подобно тому, как это имеет место в обычном электрическом конденсаторе.

**Емкость электрическая** – характеристика проводящего тела, мера его способности накапливать электрический заряд. Численно электрическая ёмкость  $C$  равна заряду  $q$ , который необходимо сообщить единичному телу для изменения его потенциала  $\varphi$  на единицу, и определяется соотношением  $C = q / \varphi$ .

**Закон Кулона** – основной закон электростатики. Два неподвижных точечных заряда взаимодействуют с силой прямо пропорциональной произведению величин этих зарядов и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними и диэлектрической проницаемости среды, в которой находятся заряды.

**Закон сохранения электрического заряда** – физический закон, в соответствии с которым в замкнутой системе взаимодействующих тел алгебраическая сумма электрических зарядов (полный электрический заряд) остается неизменной при всех взаимодействиях.

**Закон Джоуля – Ленца** – количество теплоты  $Q$ , выделяющейся в единицу времени на участке электрической цепи с сопротивлением  $R$  при протекании по нему постоянного тока  $I$ , равно:  $Q = R I^2$

**Запрещенная зона** – область значений энергии в спектре идеального кристалла, которую не могут иметь электроны, фононы, а также некоторые другие квазичастицы.

**Затухание колебаний** – уменьшение амплитуды колебаний с течением времени, обусловленное потерей энергии колебательной системой.

**Индуктивность** – физическая величина, характеризующая связь между скоростью изменения тока в проводнике и возникающей при этом ЭДС самоиндукции. Единицей индуктивности в СИ является генри.

**Интенсивность излучения** – энергетическая характеристика электромагнитного излучения, распространяющегося в заданном направлении, пропорциональная квадрату амплитуды колебаний.

**Интерференция волн** – взаимное усиление или ослабление двух (или большего числа) волн при их наложении друг на друга при одновременном распространении в пространстве.

**Ион** – Электрически заряженная частица, образующаяся при отрыве или присоединении одного или нескольких электронов (или других заряженных частиц) к атому, молекуле, радикалу и другому иону.

**Искровой разряд** – нестационарный электрический разряд в газе, возникающий в электрическом поле при давлении газа до нескольких атмосфер. Искровой разряд имеет вид пучка ярких зигзагообразных каналов.

**Колебания** – движения или состояния, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени.

**Лавина электронная** – неуклонно нарастающий процесс размножения электронов в результате ионизации атомов и молекул, как правило, электронным ударом; является главнейшим элементом электрического пробоя газов.

**Легирование полупроводников** – дозированное введение в полупроводник примесей с целью изменения их электрических свойств.

**Линейный ускоритель** – ускоритель заряженных частиц, в котором ускоряемые частицы проходят сквозь систему трубчатых электродов. Заряженные частицы, поступающие в камеру, ускоряются постоянным электрическим полем в пространстве.

**Линии магнитной индукции** – воображаемые линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора магнитной индукции в этой точке. Линии магнитной индукции замкнуты.

**Магнитная индукция** – векторная величина, характеризующая магнитное поле и определяющая силу, действующую на движущуюся или смещающуюся заряженную частицу со стороны магнитного поля в заданной точке.

**Магнитная проницаемость** – физическая величина, показывающая во сколько раз вектор магнитной индукции в однородной среде отличается от вектора магнитной индукции в той же точке пространства в вакууме. В зависимости от значения магнитной проницаемости вещества подразделяются на парамагнетики, диамагнетики и ферромагнетики.

**Магнитное поле** – силовое поле, действующее на движущиеся электрические заряды (токи) и на тела, обладающие магнитным моментом. Вместе с электрическим полем образует единое электромагнитное поле.

**Магнитный гистерезис** – отставание состояния намагниченности ферромагнетика от изменений внешнего магнитного поля.

**Магнитострикция** – изменение формы и размеров тела при намагничивании. В ферромагнетиках магнитострикция достигает значительных величин.

**Намагниченность вещества** – физическая величина, равная разности индукций магнитного поля в веществе и в вакууме.

**Напряженность магнитного поля** – векторная величина, характеризующая магнитное поле и определяющая силу, действующую на магнитный полюс носителя магнитного момента со стороны магнитного поля.

**Однородное электрическое поле** – электрическое поле, напряженность которого одинакова во всех точках пространства.

**Оптическое излучение** – электромагнитное излучение с длиной волны от 100 до 10000 нм. В зависимости от длины волны оптическое излучение подразделяется на ультрафиолетовое, видимое и инфракрасное.

**Плазма** – частично или полностью ионизованный газ, в котором плотности положительных и отрицательных зарядов практически одинаковы.

**Плотность электрического тока** – сила тока, приходящаяся на  $1 \text{ м}^2$  площади поперечного сечения проводника.

**Показатель преломления света** – мера оптической плотности среды, равная отношению скорости света в вакууме к скорости света в среде.

**Поляризация диэлектрика** – смещение положительных и отрицательных связанных зарядов в макрообъеме диэлектрика в противоположные стороны, что приводит к появлению поверхностных связанных зарядов.

**Правило Ленца** – индукционный ток всегда имеет такое направление, что его собственный магнитный поток компенсирует изменения внешнего магнитного потока, вызвавшие этот ток.

**Работа выхода электрона** – наименьшая работа, которую нужно совершить для извлечения электрона, несвязанного с атомом, из поверхности вещества в вакууме.

**Радиоволны** – электромагнитные волны, с длиной волны от 0.05 мм до  $10^8$  м. Радиоволны используются для передачи информации без проводов.

**Рекомбинация** – взаимодействие заряженных частиц противоположного знака, приводящее к образованию нейтральных атомов или молекул. При этом выделяется энергия в виде электромагнитного излучения.

**Самоиндукция** – явление возникновения электродвижущей силы в электрической цепи при изменении протекающего в ней электрического тока.

**Сегнетоэлектрики** – кристаллические диэлектрики, у которых диэлектрическая проницаемость есть величина переменная, зависящая от приложенного к кристаллу напряжения.

**Скин-эффект** – неоднородное распределение переменного тока и связанного с ним электромагнитного поля по сечению проводника. При

высоких частотах ток течет в основном в тонком поверхностном слое проводника (в скин-слое) и практически отсутствует в глубине.

**Теорема Гаусса** – поток напряженности электрического поля в вакууме через любую замкнутую поверхность пропорциональна полному заряду, находящемуся внутри этой поверхности.

**Термоэлектронная эмиссия** – явление испускания электронов нагретыми телами (эмиттерами). Для вылета электрона из вещества необходимо, чтобы его кинетическая энергия была достаточна для преодоления его связи с веществом. Термоэлектронная эмиссия используется в электровакуумных приборах.

**Точка Кюри** – температура, выше которой вещество, обладавшее свойствами ферромагнетика, теряет эти свойства.

**Фаза колебаний** – аргумент периодически изменяющейся функции, описывающей колебательный или волновой процесс.

**Фазовая скорость** – скорость распространения в пространстве фронта монохроматической волны. Фазовая скорость волн в среде зависит от частоты распространяющегося колебания.

**Фазотрон** – циклический ускоритель тяжелых заряженных частиц, в котором ускорение частиц обеспечивается высокочастотным электрическим полем изменяющейся частоты, а пространственная устойчивость частиц в процессе ускорения – стационарным магнитным полем.

**Ферриты** – общее название сложных окислов, содержащих железо и другие элементы. Большинство ферритов является ферромагнетиками и проявляет полупроводниковые или диэлектрические свойства.

**Ферромагнетик** – железо, никель, кобальт или другое вещество, которое имеет высокую магнитную проницаемость (намного превышающую единицу). Ферромагнетики применяются для изготовления постоянных магнитов сердечников трансформаторов, электродвигателей и т.д.

**Фотоэлектронный умножитель** – фотоэлектронный прибор, преобразующий световой поток в усиленный электрический сигнал, в результате вторичной электронной эмиссии.

**Фотоэффект** – явление, связанное с освобождением электронов твердого тела или жидкости под действием электромагнитного излучения. Различают внутренние, внешние и вентильные фотоэффекты.

**Циклотрон** – циклический резонансный ускоритель тяжелых заряженных частиц, в котором частота ускоряющего поля и управляющее магнитное поле постоянно во времени.

**Электрический диполь** – система двух разноименных точечный зарядов, расположенных на некотором расстоянии друг от друга.

**Электрический ток** – направленное движение свободных носителей электрического заряда в веществе или в вакууме.

**Электрическое напряжение** – скалярная величина, численно равная работе, совершаемой суммарным полем сторонних и кулоновских сил при перемещении единичного положительного заряда на участке электрической цепи.

**Электродвижущая сила** – характеристика источника энергии в электрической цепи. Электродвижущая сила измеряется отношением работы сторонних сил по перемещению заряда вдоль контура к величине этого заряда. ЭДС измеряется в вольтах.

**Электродинамика классическая** – область физики, в которой изучаются классические (неквантовые) свойства электромагнитного поля и движения электрических зарядов, взаимодействующих друг с другом посредством этого поля.

**Электромагнитная индукция** – явление возникновения ЭДС в проводнике при его движении в магнитном поле или при изменении окружающего его магнитного поля. При этом в замкнутом проводящем контуре возникает индукционный ток

**Электромагнитное поле** – особый вид материи, посредством которого осуществляются электромагнитные взаимодействия, представляющий собой единство электрического и магнитного полей.

**Электронная эмиссия** – испускание электронов телами под влиянием внешних воздействий: нагревания, потока фотонов, электронов, ионов или сильного электрического поля. В зависимости от характера внешнего воздействия различают термоэлектронную, фотоэлектронную, ионно-электронную и автоэлектронную эмиссии.

**Электростатическая индукция** – появление электрических зарядов разного знака на противоположных участках проводника или диэлектрика в электростатическом поле.

**Эффект Холла** – возникновение в проводнике или полупроводнике с током, находящемся в магнитном поле, поперечной разности потенциалов. Причиной эффекта Холла является отклонение электронов, движущихся в магнитном поле под действием силы Лоренца.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### Значения фундаментальных констант

Гравитационная постоянная	$G = 6,6720 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$
Скорость света в вакууме	$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 12,5663706144 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8,85418782 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
Постоянная Планка	$h = 6,626176 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Масса покоя электрона	$m_e = 9,109534 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Масса покоя протона	$m_p = 1,6726485 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1,6749543 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Отношение массы протона к массе электрона	$m_p/m_e = 1836,15152$
Элементарный заряд	$e^- = 1,6021892 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Отношение заряда электрона к его массе	$e^- / m_e = 1,7588047 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$
Атомная единица массы	$1 \text{ а.е.м.} = 1,6605655 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$

### Греческий алфавит

Α α – альфа	Η η – эта	Ν ν – ню	Τ τ – тау
Β β – бета	Θ θ – тэта	Ξ ξ – кси	Υ υ – ипсилон
Γ γ – гамма	Ι ι – йота	Ο ο – омикрон	Φ φ – фи
Δ δ – дельта	Κ κ – каппа	Π π – пи	Χ χ – хи
Ε ε – эпсилон	Λ λ – ламбда	Ρ ρ – ро	Ψ ψ – пси
Ζ ζ – дзета	Μ μ – мю	Σ σ – сигма	Ω ω – омега

### Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименований

Множитель	Приставка	Обозначение
$1\ 000\ 000\ 000\ 000 = 10^{12}$	тера	Т
$1\ 000\ 000\ 000 = 10^9$	гига	Г
$1\ 000\ 000 = 10^6$	мага	М
$1\ 000 = 10^3$	кило	к
$100 = 10^2$	гекто	г
$10 = 10^1$	дека	да
$0,1 = 10^{-1}$	деци	д
$0,01 = 10^{-2}$	санتي	с
$0,001 = 10^{-3}$	милли	м
$0,000001 = 10^{-6}$	микро	мк
$0,000000001 = 10^{-9}$	нано	н
$0,000000000001 = 10^{-12}$	пико	п
$0,000000000000001 = 10^{-15}$	фемто	ф
$0,00000000000000001 = 10^{-18}$	атто	а

**Производные единицы СИ,  
имеющие собственные наименования**

Величина	Единица		Выражение производной единицы	
	Наименование	Обозначение	Через другие единицы СИ	Через основные единицы СИ
Частота	герц	Гц		$\text{с}^{-1}$
Сила	ньютон	Н		$\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$
Энергия, работа, кол-во теплоты	джоуль	Дж	Н/м	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$
Мощность, поток энергии	ватт	Вт	Дж/с	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3}$
Кол-во электричества, электрический заряд	кулон	Кл	А·с	$\text{с} \cdot \text{А}$
Электрическое напряжение, электрический потенциал	вольт	В	Вт/А	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-1}$
Электрическая ёмкость	фарада	Ф	Кл/В	$\text{м}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^4 \cdot \text{А}^2$
Электрическое сопротивление	ом	Ом	В/А	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-2}$
Электрическая проводимость	сименс	См	А/В	$\text{м}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^3 \cdot \text{А}^2$
Освещенность	люкс	лк		$\text{м}^{-2} \cdot \text{кд} \cdot \text{ср}$

**Работа выхода электрона из металлов**

Металл	А, эВ	Металл	А, эВ	Металл	А, эВ
Алюминий	3,74	Висмут	4,62	Железо	4,36
Калий	2,15	Литий	2,39	Молибден	4,27
Никель	4,84	Серебро	4,28	Цезий	1,89
Барий	2,29	Вольфрам	4,50	Золото	4,58
Кобальт	4,25	Медь	4,47	Натрий	2,27
Платина	5,29	Титан	3,92	Цинк	3,74

**Подвижность ионов в электролитах,  $\text{м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$**

$\text{NO}_3^-$	$6,4 \cdot 10^{-8}$
$\text{Ag}^+$	$5,6 \cdot 10^{-8}$
$\text{Cl}^-$	$6,8 \cdot 10^{-8}$
$\text{H}^+$	$3,3 \cdot 10^{-8}$
$\text{K}^+$	$6,7 \cdot 10^{-8}$

**Диэлектрические проницаемости**

Диэлектрик	$\epsilon$	Диэлектрик	$\epsilon$
Вода	81	Керосин	2,0
Полиэтилен	2,3	Стекло	6,0
Воздух	1,00058	Парафин	2,0
Слюда	7,5	Фарфор	6,0
Воск	7,8	Плексиглас	3,5
Спирт	26	Эбонит	2,7

**Удельное электросопротивление  
некоторых материалов,  $\text{Ом} \cdot \text{м} \cdot 10^6$**

Серебро	0,016	Константан	0,4–0,51
Медь	0,017	Нихром	1,1
Алюминий	0,029	Фехраль	1,2
Никелин	0,4–0,44	Хромель	1,3
Манганин	0,42	Уголь для дуговых ламп	40–50