

Упражнение 7. Решите методом Фурье задачи

1. $u_t = u_{xx} - 4u$, $t > 0$, $0 < x < \pi$, $u(0, t) = u(1, t) = 0$, $u(x, 0) = x^2 - \pi x$
2. $u_t = u_{xx}$, $t > 0$, $0 < x < 1$, $u_x(0, t) = u(1, t) = 0$, $u(x, 0) = x^2 - 1$.
3. $u_t = u_{xx} + u + 2 \sin 2x \sin x$, $t > 0$, $0 < x < \pi/2$, $u_x(0, t) = u(\pi/2, t) = 0$, $u(x, 0) = 0$.
4. $u_t = u_{xx} - 2u_x + x + 2t$, $t > 0$, $0 < x < 1$, $u(0, t) = u(1, t) = t$, $u(x, 0) = e^x \sin \pi x$.
5. $u_t = u_{xx} + 4u + x^2 - 2t - 4x^2t + 2 \cos^2 x$, $t > 0$, $0 < x < \pi$, $u_x(0, t) = 0$, $u_x(\pi, t) = 2\pi t$, $u(x, 0) = 0$.

Упражнение 8. Решите следующие одномерные уравнения теплопроводности на всей оси

1. $u_t = u_{xx}$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $u(x, 0) = \sin x$.
2. $u_t = u_{xx} + 3t^2$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $u|_{t=0} = \sin x$.
3. $4u_t = u_{xx}$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $u|_{t=0} = e^{2x-x^2}$.
4. $u_t = u_{xx}$, $x > 0$, $t > 0$, $u(x, 0) = 0$, $u(0, t) = \sin t$
5. $u_t = 2u_{xx} - u + t \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $u(x, 0) = 1$.

Упражнение 9.

1. Какие из функций 1 , e^{-x} , e^{-x^2} , $p(x)e^{-x^2}$ (здесь $p(x)$ — некоторый многочлен) лежат в пространстве Шварца $\mathcal{S}$?
2. Зафиксируем произвольные числа $a < b$. Шапочкой на интервале (a, b) называют функцию $\omega_{a,b}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin (a, b), \\ e^{\frac{1}{(x-a)(x-b)}}, & \text{если } x \in (a, b). \end{cases}$ Принадлежит ли эта функция пространству $\mathcal{S}$?
3. Какие из функций 1 , $p(x)$ (здесь $p(x)$ — некоторый многочлен), e^x , $|x|$, $\frac{\omega_{-1,1}(x)}{|x|^{1/2}}$ являются элементами $\mathcal{S}'$?
4. Какие из функционалов $\delta_a(x)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n(x)$, $\delta'_a(x)$ (каждой тестовой φ сопоставляет $-\varphi'(a)$) лежат в $\mathcal{S}'$?
5. Выразите функционал $\frac{1}{x+i0}$, действующий по правилу $\langle \frac{1}{x+i0}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon} dx$ в виде линейной комбинации $v.p. \frac{1}{x}$ и $\delta_0(x)$.
6. Найдите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(nx)}{x}$ в $\mathcal{S}'$.
7. Найдите производные $(x \operatorname{sign} x)'$, $(\theta(x) \sin x)'$ и $(\theta(x) \cos x)'$ (здесь $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ — функция Хевисайда).
8. Функцию $f(x) = x$ определили на отрезке $[-1, 1]$, а затем периодически продолжили на всю числовую ось. Найдите f' и f'' .
9. Найдите преобразование Фурье функций $I_{[-a,a]}(x)$, $\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{\sin x}{x}$ и $e^{-|x|}$.
10. Найдите преобразование Фурье функций $\delta_0(x)$, $\delta_a(x)$ и $\delta'_0(x)$.